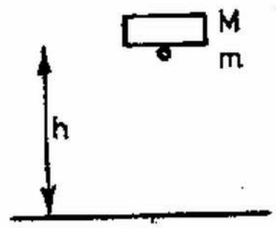
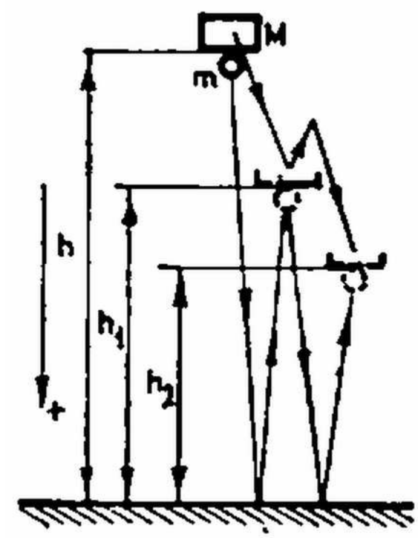


Az energia megmaradása miatt h_1 magasságban az ütközés előtt mindkét test sebessége egyforma abszolút értékű. A hasáb sebessége $v = \sqrt{2g(h-h_1)}$, a golyóé pedig $-v = -\sqrt{2g(h-h_1)}$. (A pozitív irány lefelé mutat.) A rugalmas ütközés utáni sebességeket az impulzus- és energiamegmaradás törvényéből határozhatjuk meg. A hasáb sebessége:

$$v_1 = v\frac{M-3m}{M+m}, \tag{1}$$

a golyóé pedig

$$v_2 = v\frac{3M-m}{M+m}. \tag{2}$$



Annak a feltétele, hogy a hasáb felfelé induljon el:

$$M < 3m \tag{3}$$

A v_2 sebességgel induló golyó a talajhoz $\sqrt{v_2^2 + 2gh_1}$ sebességgel érkezik, ezt megkaphatjuk például az energia megmaradásából.

Ha a golyó a talajról visszapattanva h_2 magasságba érkezik, akkor sebességének abszolút értéke $\sqrt{v_2^2 + 2g(h_1-h_2)}$, tehát az első ütközés óta eltelt összes idő

$$t_2 = \frac{\sqrt{v_2^2+2gh_1} - v_2}{g} + \frac{\sqrt{v_2^2+2gh_1} \pm \sqrt{2g(h_1-h_2)}}{g}. \tag{4}$$

A $-$ előjel akkor érvényes, ha a golyó alulról, a $+$ előjel pedig akkor, ha a golyó felülről érkezik a h_2 magasságba. Hasonlóképpen, a hasáb

$$t_1 = \frac{-v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + 2g(h_1-h_2)}}{g} \tag{5}$$

idő alatt érkezik h_2 magasságba.

A golyó akkor fog másodszor ütközni a hasábbal – mielőtt újra pattanna a talajon –, ha van olyan $h_2 > 0$, amelyre $t_1 = t_2 > 0$, ahol t_1, t_2 a (4), ill. (5) összefüggésekből számított érték. Tegyük fel először, hogy a (4), (5) egyenleteknek létezik $t = t_1 = t_2 > 0$, $h_2 > 0$ megoldása. Az (5) egyenletből a $2g(h_1-h_2)$ mennyiséget kifejezve és azt (4)-be írva rendezés után kapjuk:

$$t = \frac{2}{g}\frac{(v_2^2+2gh_1) - v_2\sqrt{v_2^2+2gh_1}}{2\sqrt{v_2^2+2gh_1} + v_1 - v_2}, \tag{6}$$

a kettős előjelektől függetlenül.

(1)-et és (2)-t beírva (6)-ba nyerjük:

$$t = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{g}(M+m)} \cdot \frac{h(3M-m)^2 + h_1(M+m)^2 - \sqrt{h}(3M-m)\sqrt{h(3M-m)^2 + h_1(M+m)^2}}{2\sqrt{h(3M-m)^2 + h_1(M+m)^2} - 2\sqrt{h}(M+m)}.$$

A második ütközéskor a hasáb sebessége:

$$v_3 = v_1 + gt,$$

a golyóé:

$$v_4 = v_3 - 2\sqrt{v_2^2 + 2gh_1} + gt.$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy mik voltak a helyes előjelek a (4), (5) egyenletrendszerben.

Ha a (4), (5) egyenletrendszernek nincs $t = t_1 = t_2 > 0$, $h_2 > 0$ megoldása, akkor a golyó a két összeütközés között kétszer – vagy n-szer – pattan a földhöz és ezért a (4) egyenlet helyett a következőt kell használni:

(4a) $$t_2 = \frac{2n\sqrt{v_2^2 + 2gh_1}}{g} + \frac{-v_2 \pm \sqrt{v_2^2 + 2g(h_1 - h_2)}}{g}.$$

A golyó sebessége a második összeütközéskor:

$$v_4 = v_2 - 2n\sqrt{v_2^2 + 2gh_1 + gt}.$$

A két összeütközés között eltelt időt úgy kapjuk meg, hogy a (4a), (5) egyenletrendszert $n = 2,\ 3,\ \ldots$ mellett megoldjuk addig, amíg nem adódik $t = t_1 = t_2 > 0$, $h_2 > 0$ megoldás. Így kapjuk:

$$t = \frac{2}{g}\frac{n\sqrt{v_2^2 + 2gh_1}(n\sqrt{v_2^2 + 2gh_1} - v_2)}{2n\sqrt{v_2^2 + 2gh_1} + v_1 - v_2}.$$

Vladár Károly