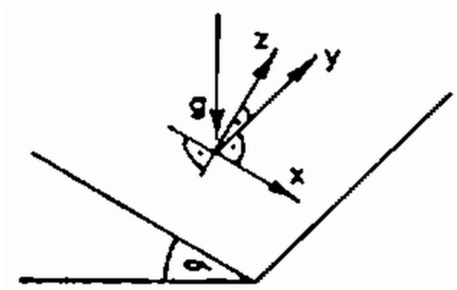
I. megoldás. Vegyük fel a koordináta-rendszerünket úgy, hogy benne a lejtő a $Z=0$ egyenletű sík legyen, az x tengely legyen a feldobási ponton áthaladó esésvonal, az y tengely pedig ugyanezen a ponton áthaladó szintvonal (l. az 1. ábrát).



1. ábra

Az origóból elindított testek mindenkor egy gömbfelületen helyezkednek el, amelynek középpontja g-vel szabadon esik, sugara pedig $v_0\cdot t$ szerint tágul ($t=0$ időpillanatban történt a dobás). A gömb egyenlete:

$$\left[x-(g/2)\sin\alpha\cdot t^2\right]^2+y^2+\left[z+(g/2)\cos\alpha\cdot t^2\right]^2=v_0^2\cdot t^2 \tag{1}$$

A t időpillanatban a becsapódás x, y koordinátái kielégítik az

$$\left[x-(g/2)\sin\alpha\cdot t^2\right]^2+\left[(g/2)\cos\alpha\cdot t^2\right]^2=v_0^2t^2 \tag{2}$$

egyenletet.

Rögzített x mellett keressük y szélsőértékét! t^2-nek egy másodfokú függvényéről van szó, amely a maximumát

$$t^2=\frac{v^2+xg\sin\alpha}{2\cdot(g/2)^2}$$

esetén veszi fel, a maximum értéke

$$y^2=\frac{\left(v^2+xg\sin\alpha\right)^2}{g^2}-x^2. \tag{3}$$

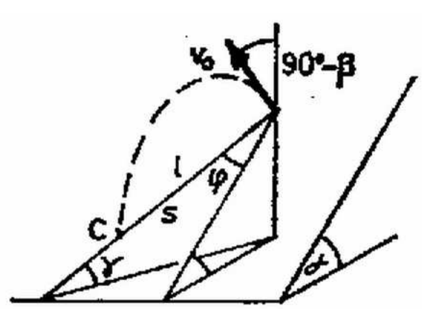
Ezt az egyenlőséget rendezve kapjuk a következő összefüggést:

$$\frac{y^2}{\left(v^2/g\cos\alpha\right)^2}+\frac{\left[x-v^2\sin\alpha/(g\cos\alpha)\right]^2}{\left(v^2/g\cos^2\alpha\right)^2}=1. \tag{4}$$

Ez a becsapódások helyét határoló ellipszis egyenlete, amelyen belül minden pontba (a határra is) eshetnek a testek. Az origó az ellipszis egyik fókusza.

Kovács Tamás (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Vegyünk fel a lejtő síkjában egy polárkoordináta-rendszert, amelynek tengelye a dobási pontból induló esésvonal. Minden eldobott test pályájának a lejtő síkjára vett függőleges vetülete egy e félegyenes, ennek polárszögét jelöljük φ-vel, a vízszintessel bezárt szögét γ-val (2. ábra).



2. ábra

Keressük az e félegyenes mentén azt a legtávolabbi pontot, ahol leeshetnek a testek, ennél közelebb levő bármely pontra irányítható a dobás kisebb vagy nagyobb szögű hajítással.

A γ és α szög közötti összefüggés a Pitagorasz-tétel alapján:

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\varphi \cdot \sin^2\alpha. \tag{5}$$

A C becsapódási pont távolsága 0-tól, a β hajítási szög függvényében: (2. ábra)

$$s = \frac{\sin(2\beta+\gamma)+\sin\gamma}{g\cos^2\gamma} \cdot v^2. \tag{6}$$

Ennek $\beta = 135^\circ - (\gamma/2)$ esetén van maximuma, amelynek értéke

$$s_{\max} = \frac{v^2}{g(1-\sin\gamma)}. \tag{7}$$

(5) alapján:

$$s_{\max} = \frac{v^2}{g(1-\cos\varphi\cdot\sin\alpha)}.$$

Ez egy ellipszis polárkoordinátás egyenlete, a becsapódási helyek határoló görbéjének az egyenlete.

Erdős László (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o. t.)