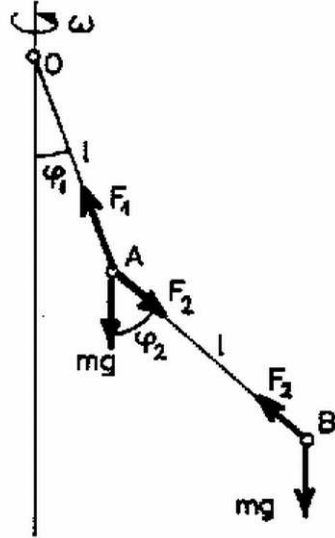


Megfelelően nagy szögsebességgel forgatva a rendszert, a pálcák a függőlegestől  $\varphi_1$  és  $\varphi_2$  szögekkel fognak kitérni. Írjuk fel ebben a helyzetben a golyók mozgásegyenletét (1. ábra)! Az  $A$  tömegpontra az egyenletek:



1. ábra

$$F_1 \cos \varphi_1 - mg - F_2 \cos \varphi_2 = 0,$$

$$F_1 \sin \varphi_1 - F_2 \sin \varphi_2 = ml\omega^2 \sin \varphi_1;$$

a  $B$  golyóra pedig

$$F_2 \cos \varphi_2 - mg = 0,$$

$$F_2 \sin \varphi_2 = ml\omega^2(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2).$$

A pálcákban ébredő  $F_1$  és  $F_2$  erőket kiküszöbölve az egyenletekből, valamint az  $\alpha = l\omega^2/g$  új változót bevezetve az alábbi egyenletrendszert kapjuk  $\varphi_1$  és  $\varphi_2$ -re:

$$2 \operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2 = \alpha \sin \varphi_1,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \alpha(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2).$$

Ezekből az egyenletekből  $\varphi_1$  és  $\varphi_2$  explicit kifejezése reménytelenül bonyolult vállalkozás lenne. Bennünket azonban most csupán az érdekel, hogy mekkora  $\alpha$  (ill.  $\omega$ ) értéktől kezdve fogunk nullától különböző szögkitérést kapni. Ebben a határhelyzetben  $\varphi_1$  és  $\varphi_2$  kicsiny értékűek, így az (5) és a (6) egyenletekben a  $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$  és a  $\sin \varphi \approx \varphi$  közelítések alkalmazhatók. Ennek felhasználásával  $\alpha$ -ra másodfokú egyenletet nyerünk:

$$\alpha^2 - 4\alpha + 2 = 0,$$

amelynek kisebbik gyöke fogja a kritikus szögsebességértéket meghatározni:

$$\omega_{kr} = \sqrt{(g/l)(2 - \sqrt{2})}.$$

A  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 0$  mindig megoldása az egyenleteknek. Belátható, hogy ha  $\omega < \omega_{kr}$ , akkor a  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  stabil megoldás, míg ha  $\omega > \omega_{kr}$ , akkor instabil, azaz bármilyen kis eltérés ettől a helyzettől már tovább téríti ki a pálcákat egészen addig, amíg a rendszer át nem megy az (5) és (6) egyenletekkel leírt helyzetbe.

A stabilitás vizsgálatára használjunk  $\omega$  szögsebességgel forgó koordinátarendszert! Ha az  $m$  tömegek kicsit mozdulnak ki a tengelytől, akkor a helyzeti energia növekedése

$$\Delta E_h = \frac{mgl}{2}(2\varphi_1^2 + \varphi_2^2).$$

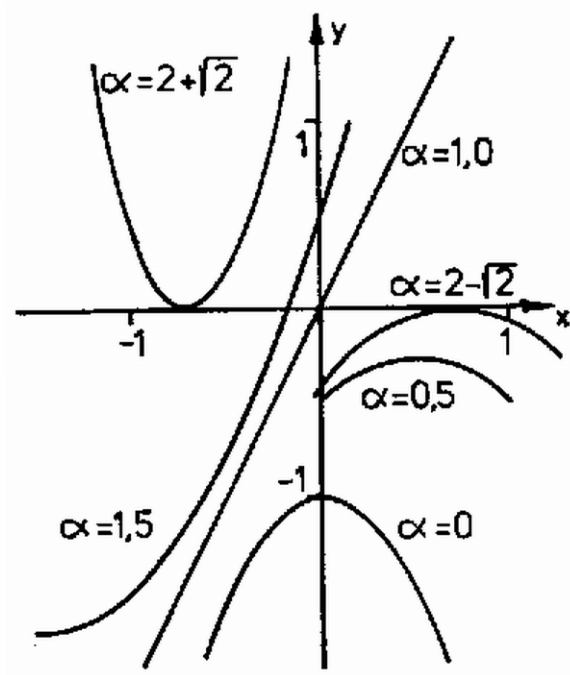
Ezt a növekedést a centrifugális erők

$$\Delta W_{cf} = \frac{m\omega^2 l^2}{2} (2\varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2)$$

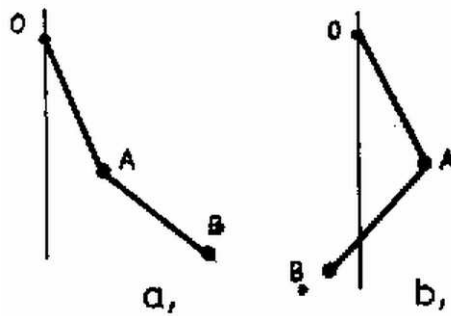
munkavégzése fedezheti (ez utóbbi a tömegek kinetikus energiája). Mindaddig, amíg különbségük ( $\Delta E = \Delta W_{cf} - \Delta E_h$ ) negatív, a  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  helyzet stabilis. Kis átlakítások után

$$(7) \quad y = 2(\alpha - 1) \cdot x^2 + 2\alpha x + (\alpha - 1)$$

adódik, ahol  $y = \frac{2\Delta E}{mgl\varphi_2^2}$ ,  $x = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ . A 2. ábra néhány  $\alpha$  paraméter-értékre feltünteteti ezt a függvénykapcsolatot.



2. ábra



3. ábra

$\alpha < 2 - \sqrt{2}$  esetén minden  $x$ -re  $y < 0$ , azaz a  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  helyzet stabilis.  $\alpha \leq 1$  ( $\omega \leq \sqrt{\frac{g}{l}}$ ) esetén csak pozitív  $x$  értékeknél válhat  $y$  (és így  $\Delta E$ ) pozitívvá, azaz  $\varphi_1$  és  $\varphi_2$  azonos előjelűek: az egyensúlyi helyzet akkor valósulhat meg, ha a pálcák azonos irányban térnek ki (3a ábra).

$\alpha > 1$  esetén a  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  helyzetben bekövetkező zavar (perturbáció) mindkét stabil konfigurációt (3a és 3b ábrák) létrehozhatja.

Több dolgozat alapján