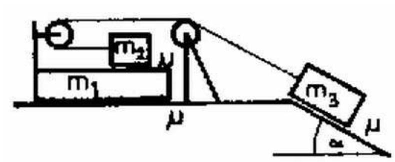
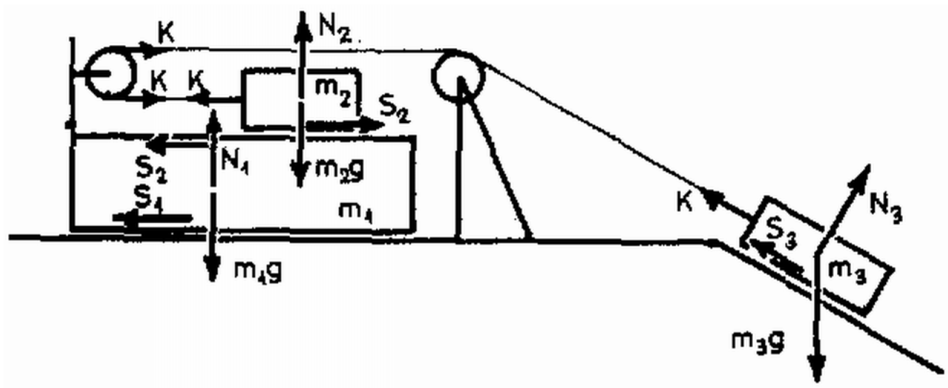


Először rajzoljuk fel a testekre ható erőket (l. az ábrát)!



Megállapíthatjuk, hogy

$$N_1 = (m_1 + m_2)g, \quad N_2 = m_2 g, \quad N_3 = m_3 g \cos\alpha.$$

Vizsgáljuk meg, lehetséges-e, hogy $S_2 > K$, ahol K a kötélben ébredő erő. Ez esetben az m_2 tömegű test jobbra mozog, ami csak akkor lehetséges, ha az m_1 tömegű test is jobbra mozog, hiszen az m_3 tömegű test biztos, hogy jobbra megy, ha egyáltalán mozog. $N_1 > N_2$ miatt $S_1 > S_2$ (S_1 most csúszási súrlódási erő). Tehát az m_1-re jobbra ható $2K$ erő kisebb, mint az ellenkező irányban ható $S_1 + S_2$, és ez ellentmondásban van azzal, hogy az m_1 tömegű test jobbra mozog. Tehát nem lehetséges az, hogy $S_2 > K$, így amennyiben az m_2 tömegű test elmozdul, akkor balra mozdul el. Az m_1 tömegű test balra nem mozdulhat el, mert ekkor csak az S_2 erő hat rá balra, és a rá ható jobbra mutató erők az előbbiek miatt ennél nagyobbak.

A fentiek figyelembevételével a testek mozgására a következő lehetőségek vannak:

a) Egyik test sem mozog.

b) Az m_3 tömegű test lejtőirányban, az m_2 tömegű test balra mozog a gyorsulással, míg az m_1 tömegű test nyugalomban van.

c) Mindhárom test mozog: az m_3 tömegű a_3 gyorsulással lejtőirányban, az m_1 tömegű a_1 gyorsulással jobbra, és az m_2 tömegű a_2 gyorsulással balra.

Az *a)* eset megvalósulásának feltétele:

$$K = S_2 \quad \text{és} \quad m_3 g \sin\alpha = K + S_3.$$

Felhasználva, hogy $S_2 \leqq \mu m_2 g$ és $S_3 \leqq \mu m_3 g \cos\alpha$, ekkor a következő egyenlőtlenségnek kell teljesülnie:

$$m_3(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \mu m_2 \leqq 0. \tag{1}$$

A *b)* eset vizsgálatához írjuk fel a testek mozgásegyenletét: az m_1 tömegű test mozgásegyenlete:

$$2K - S_1 - S_2 = 0, \tag{2}$$

az m_2 tömegű test mozgásegyenlete:

$$K - S_2 = m_2 a, \tag{3}$$

az m_3 tömegű test mozgásegyenlete:

$$m_3 g \sin\alpha - K - S_3 = m_3 a. \tag{4}$$

Továbbá tudjuk, hogy

$$S_1 \leq \mu g(m_1 + m_2), \quad S_2 = \mu m_2 g, \quad S_3 = \mu m_3 g \cos\alpha. \tag{5}$$

(3), (4), (5) felhasználásával megkapjuk a keresett gyorsulást és a kötélerőt:

$$a = g\frac{m_3(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \mu m_2}{m_2 + m_3},$$

$$K = g\frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}(\mu + \sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Vegyük figyelembe, hogy (4) alapján

$$m_3 g \sin\alpha > K + S_3,$$

így (2) és (5) felhasználásával kapjuk, hogy a *b)* esetben az alábbi egyenlőtlenségeknek kell teljesülniük:

$$\frac{\mu m_1(m_2+m_3)}{2m_2} \geq m_3(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \mu m_2 > 0. \tag{6}$$

A *c)* esetben hasonlóképpen járunk el. A mozgásegyenletek:

$$2K - S_1 - S_2 = m_1 a_1, \tag{7}$$

$$K - S_2 = m_2 a_2, \tag{8}$$

$$m_3 g \sin\alpha - K - S_3 = m_3 a_3, \tag{9}$$

továbbá

$$S_1 = \mu g(m_1+m_2), \quad S_2 = \mu m_2 g, \quad S_3 = \mu m_3 g \cos\alpha. \tag{10}$$

A kötél nyújthatatlansága miatt a gyorsulások között érvényes a következő kényszerfeltétel:

$$a_2 = a_3 - 2a_1. \tag{11}$$

Az egyenletrendszert megoldva a következőket kapjuk:

$$K = g\frac{4\mu m_2^2 m_3 + m_1 m_2 m_3(\sin\alpha - \mu\cos\alpha + 3\mu)}{m_1 m_2 + 4m_2 m_3 + m_1 m_3}, \tag{12}$$

$$a_1 = g\frac{2m_2 m_3(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - 2\mu m_2^2 - \mu m_1(m_2+m_3)}{m_1 m_2 + 4m_2 m_3 + m_1 m_3}, \tag{13}$$

$$a_2 = g\frac{m_1 m_3(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + 4m_2 m_3(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + m_2\mu(3m_1 - 4m_2)}{m_1 m_2 + 4m_2 m_3 + m_1 m_3}. \tag{14}$$

a_2 -t a (11) összefüggés segítségével határozhatjuk meg.

A mozgás létrejöttének egyik szükséges feltételére adódik $2K > S_1 + S_2$, azaz $a_1 > 0$, valamint (13) figyelembevételével:

$$\frac{\mu m_1(m_2+m_3)}{2m_2} < m_3(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \mu m_2. \tag{15}$$

Ha érvényes (15), akkor nyilván az

$$m_3(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \mu m_2 > 0$$

feltétel is teljesül.

Mivel az *a), b)* és *c)* eset megvalósulásához szükséges (1), (6), valamint (15) feltételek egymást kizárják, és más eset logikailag nem lehetséges, így (1) teljesülésekor szükségképpen az *a)* eset, (6) teljesülésekor a *b)* eset, végül (15) teljesülésekor a *c)* eset valósul meg.

Jurisits Miklós (Bonyhád, Petőfi S. Gimn., II. o. t.)
Fáth Gábor (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.) és
Fodor Gyula (Budapest, Móricz Zs. Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján