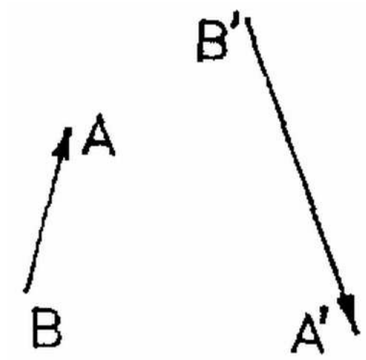
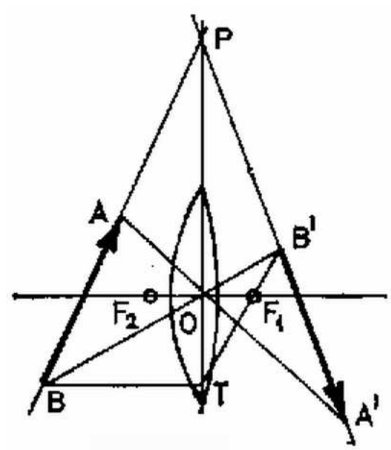
I. megoldás. Mivel a leképezésnél valódi fordított állású kép keletkezett, a lencse csak gyűjtőlencse lehet.



Az A pontból A'-be, illetve a B pontból B'-be törés nélkül haladó fénysugarak a lencse középpontján haladnak át (1. ábra), metszéspontjukat jelöljük O-val, ami a lencse tengelyének és az optikai tengelynek egyaránt pontja.

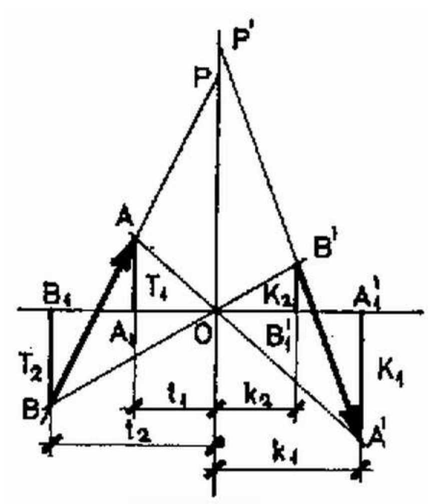


1. ábra

Most lássuk be, hogy az AB pontokat összekötő egyenes és az $A'B'$ pontokat összekötő egyenes a lencse tengelyén metszi egymást. Vizsgáljuk a BA irányú fénysugár útját! Mivel ez átmegy az A és B ponton, azért a lencsén megtörve A'-n és B'-n is át kell haladnia. Így az A, B pontokat összekötő egyenes és az A', B' pontokat összekötő egyenes valóban a lencse tengelyén metszi egymást. Jelöljük a metszéspontot P-vel. Tehát OP egyenese a lencse tengelye. Az optikai tengelyt most már megkapjuk, ha erre a tengelyre merőlegest állítunk az O pontban. Ha ezután a B pontból induló, optikai tengellyel párhuzamos fénysugár útját vizsgáljuk, annak át kell mennie a B' ponton, valamint a fókuszponton. Ha tehát a B pontból a PO egyenesre bocsátott merőleges T talppontját összekötjük B'-vel, akkor az összekötő egyenes és az optikai tengely metszéspontja adja a lencse egyik fókuszpontját, F_1-et. A másik fókuszpont ennek O-ra való tükrözésével adódik.

Szekanecz Zoltán (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Geometriai meggondolásokkal is igazolhatjuk, hogy az AB és az $A'B'$ egyenes a lencse tengelyén metszi egymást. Tegyük fel ugyanis, hogy a lencse tengelyét az AB egyenes a P pontban, az $A'B'$ egyenes pedig a P' pontban metszi. Tekintsük a 2. ábrát!



2. ábra

Vizsgáljuk az AB tárgy helyett az AA_1, BB_1 tárgyakat, jelölje ezek nagyságát T_1, illetve T_2, képeik nagyságát K_1, K_2. A megfelelő tárgy-, illetve képtávolságok legyenek t_1, t_2, k_1, k_2, a lencse fókusztávolsága f. Legyen az AB egyenesnek az optikai tengellyel alkotott metszéspontja C, az $A'B'$ egyenesnek az optikai tengellyel alkotott metszéspontja pedig C'. A 2. ábráról könnyen látható, hogy a CA_1A, CB_1B, COP háromszögek hasonlóak, így megfelelő oldalaik aránya egyenlő, azaz

$$(\overline{CA_1})/(\overline{A_1A}) = (\overline{CB_1})/(\overline{B_1B}) = (\overline{CO})/(\overline{OP}).$$

Beírva a tárgytávolságokat és tárgynagyságokat, kapjuk:

$$\frac{t_2 - t_1 - \overline{CA_1}}{T_2} = \frac{\overline{CA_1}}{T_1}, \qquad \text{és} \qquad \frac{\overline{CA_1}}{T_1} = \frac{\overline{CA_1} + t_1}{\overline{OP}}.$$

Innen $\overline{OP}$-t kifejezve:

$$\text{(1)} \qquad \overline{OP} = \frac{T_2 t_1 + T_1 t_2}{t_2 - t_1}.$$

Ugyanilyen meggondolás alapján a $C'A_1'A'$, $C'B_1'B'$, $C'OP'$ háromszögek hasonlóak, így

$$\frac{\overline{C'A_1'}}{\overline{A_1'A'}} = \frac{\overline{C'B_1'}}{\overline{B_1'B'}} = \frac{\overline{C'O}}{\overline{OP'}}.$$

Itt a képtávolságokat, ill. képnagyságokat írjuk be, amivel

$$\frac{k_1 - k_2 - \overline{C'B_1'}}{K_1} = \frac{\overline{C'B_1'}}{K_2} \qquad \text{és} \qquad \frac{\overline{C'B_1'}}{K_2} = \frac{\overline{C'B_1'} + k_2}{\overline{OP'}}.$$

Innen

$$\text{(2)} \qquad \overline{OP'} = \frac{K_1 k_2 + K_2 k_1}{k_1 - k_2}.$$

Tudjuk, hogy $K_i/T_i = k_i/t_i$, illetve $(1/f) = (1/k_i) + (1/t_i)$ $i = 1,$ 2-re. Ebből átrendezéssel adódik, hogy

$$k_i = \frac{f t_i}{t_i - f}, \qquad \text{illetve} \qquad K_i = \frac{T_i f}{t_i - f}.$$

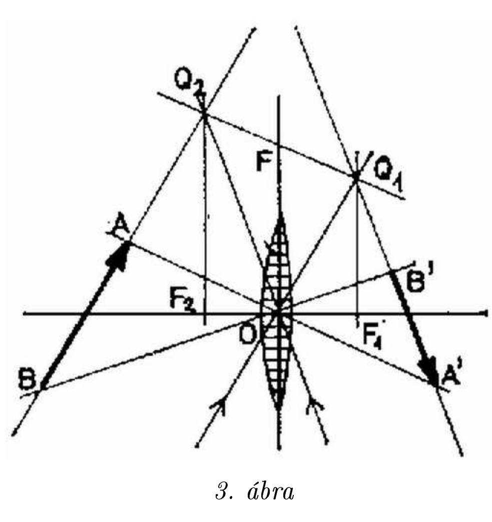
Ezt (2)-be helyettesítve:

$$\overline{OP'} = \frac{\dfrac{T_2 t_1 f^2 + T_1 t_2 f^2}{(t_1 - f)(t_2 - f)}}{-\dfrac{t_2 f}{t_2 - f} + \dfrac{t_1 f}{t_1 - f}} = \frac{T_1 t_2 + T_2 t_1}{t_2 - t_1}$$

adódik, amely megegyezik az (1) kifejezéssel. Tehát $\overline{OP} = \overline{OP'}$, azaz $P = P'$, vagyis az A, B pontokat és az A', B' pontokat összekötő egyenes valóban a lencse tengelyén metszi egymást.

Nagy Róbert (Győr, Révai M. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Szerkesszük meg először az I. megoldásban elmondottak alapján a lencse tengelyének és az optikai tengelynek a metszéspontját, O-t.



3. ábra

Tudjuk, hogy a gyűjtőlencse a végtelen távoli pontból párhuzamosan érkező fénysugarakat a fókuszpont síkjában gyűjti össze, valamint az AB fénysugár a lencsén áthaladva az $A'B'$ irányban folytatja útját. Válasszuk most az AB egyenessel párhuzamos, O-n átmenő fénysugarat. Mivel ez a lencse középpontján halad át, egyenesen folytatja útját. Az előzőek szerint ennek a fénysugárnak az $A'B'$ egyenessel alkotott metszéspontja a fókuszpont síkjába esik. Legyen ez a pont Q_1. Ha most ugyanezt megnézzük az $A'B'$ irányú és a vele párhuzamos, O-n átmenő fénysugárra, az utóbbi fénysugár és az AB egyenes metszéspontja, Q_2 a másik fókusztpont síkjába kell, hogy essék (3. ábra). A két fókuszsík a lencse tengelyétől egyenlő távolságra, a lencse tengelyével párhuzamosan helyezkedik el, így $\overline{Q_1Q_2}$ felezőpontja, F, rajta kell, hogy legyen a lencse tengelyén. F-et O-val összekötve megkapjuk a lencse tengelyét, majd ebből az optikai tengelyt. Az optikai tengelyre Q_1- től, ill. Q_2-től bocsátott merőlegesek talppontjai pedig meghatározzák a lencse fókuszpontjait, F_1-et és F_2-t.

Molnár Zoltán (Nagykőrös, Arany J. Gimn., IV. o. t.)