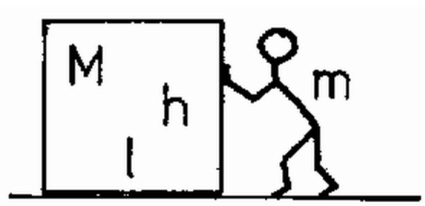
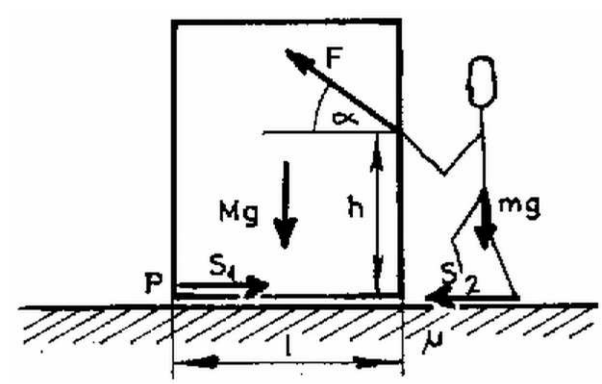


Az l szélességű láda eltolásához szükséges F tolóerőnek a vízszintessel bezárt α szögét, valamint támadáspontjának a talajtól mért h távolságát úgy kell megválasztanunk, hogy egyidejűleg a következő feltételek teljesüljenek:

– a láda csúszik a talajon,
– a ládát toló ember nem csúszik meg,
– a láda nem billen fel,
– a ládát az ember nem emeli fel.

(Feltételezzük, hogy a ládát toló ember nem billen fel.)

Ezek a feltételek a keresett F, α, h paraméterekre rendre a következő megszorításokat adják (l. az ábrát):



$$S_1 = \mu(Mg - F\sin\alpha) \le F\cos\alpha,$$
$$F\cos\alpha \le \mu(mg + F\sin\alpha) = S_2,$$
$$Fh\cos\alpha + Fl\sin\alpha \le Mgl/2,$$
$$F\sin\alpha \le Mg;$$

vagy kissé átrendezve

$$F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) \ge \mu Mg, \tag{1}$$
$$F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) \le \mu mg, \tag{2}$$
$$F\left[(h/l)\cos\alpha + \sin\alpha\right] \le \mu Mg/2, \tag{3}$$
$$F\sin\alpha \le Mg. \tag{4}$$

Itt S_1, ill. S_2 a láda és a talaj, ill. az ember és a talaj közötti súrlódási erőt, F a tolóerő abszolút értékét jelöli, a felbillenés elleni stabilitás (3) feltételében a forgatónyomatékokat a P pontra írtuk fel.

Feladatunk az, hogy az F, α, h paraméterek olyan tartományait találjuk meg, amelyekre az (1)–(4) egyenlőtlenségek egyidejűleg teljesülnek. (L. az 1663. feladatot, KML 62. 1981, 131. oldal.)

Először is vegyük észre, hogy (4)-nél (3) szigorúbb feltétel, így (4)-et egyszerűen elhagyhatjuk. Továbbá $F > 0$ miatt (1) bal oldalának pozitívnak kell lennie, ezért teljesülnie kell a

$$\mathrm{tg}\,\alpha > -1/\mu \tag{5}$$

feltételnek. A (2) és (3) bal oldalán a zárójelben levő kifejezés előjele tetszőleges lehet, ami négy különböző esetet jelent.

$$\cos\alpha - \mu\sin\alpha \ge 0, \tag{2a}$$
$$\cos\alpha - \mu\sin\alpha < 0, \tag{2b}$$
$$(h/l)\cos\alpha + \sin\alpha \ge 0, \tag{3a}$$
$$(h/l)\cos\alpha + \sin\alpha < 0. \tag{3b}$$

Ezek közül a (2b) és (3b) egyidejűleg nem állhat fenn, hiszen (2b) a $\mathrm{tg}\,\alpha > > 1/\mu > 0$ feltételt, míg (3b) a $\mathrm{tg}\,\alpha < (-h/l) < 0$ feltételt jelenti. A többi egyenlőtlenség egyidejűleg is teljesülhet, ezért meg kell vizsgálnunk az egyes eseteket az eredeti (1)–(3) feltételekbe visszahelyettesítve.

I. Tegyük fel, hogy (2b) teljesül, vagyis $\operatorname{tg}\alpha > 1/\mu$. Ekkor az előzőek alapján csak a (3a), azaz a $\operatorname{tg}\alpha \geq (-h/l)$ feltétel lehetséges. Feltevésünk értelmében a (2) feltétel minden $F > 0$ értékre teljesül, (1) és (3) pedig csak akkor fér össze, ha lehetséges α és h olyan megválasztása, amelyre

$$\frac{Mg}{2\left[(h/l)\cos\alpha + \sin\alpha\right]} \geq \frac{\mu Mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha.}$$

Ezt rendezve kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg}\alpha \leq (1/\mu) - (2h/l), \tag{6}$$

ami azonban lehetetlen, hiszen (2b) értelmében $\operatorname{tg}\alpha > 1/\mu$.

II. Tekintsük most azt az esetet, amikor (2a) és (3b) teljesül, azaz az ezekkel egyenértékű $\operatorname{tg}\alpha \leq 1/\mu$, ill.

$$\left(-\frac{1}{\mu}\right) < \operatorname{tg}\alpha < -\frac{h}{l} < 0 \tag{7}$$

feltételt. Ekkor (3) minden $F > 0$-ra teljesül, (1) és (2) viszont csak akkor fér össze, ha lehetséges α értékének olyan megválasztása, hogy

$$\frac{\mu Mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} \leq \frac{\mu mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha},$$

Ezt rendezve a

$$\operatorname{tg}\alpha \geq -\frac{1}{\mu}\cdot\frac{m-M}{m+M} \tag{8}$$

egyenlőtlenség adódik. Mivel $\operatorname{tg}\alpha < 0$, (8) csak akkor teljesül, ha $m > M$. Ugyanakkor $m > M$ esetén (8) az (5) feltételnél szigorúbb. Összehasonlítva (8)-at (7)-tel, kapjuk:

$$-\frac{h}{l} > \operatorname{tg}\alpha \geq -\frac{1}{\mu}\cdot\frac{m-M}{m+M} \qquad (m > M). \tag{7a}$$

Ha az F erő támadáspontját úgy választjuk, hogy

$$0 < h \leq \frac{1}{\mu}\frac{m-M}{m+M}l, \tag{9}$$

biztosan létezik a (7a) feltételnek eleget tevő α érték. Ilyenkor a tolóerő olyan értékű lehet, amelyre teljesül

$$\frac{\mu Mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} \leq F \leq \frac{\mu mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}. \tag{10}$$

A fentiekből világos, hogy az előbbi feltételeknek eleget tevő F, α, h esetén az. (1)–(3) feltételek valóban teljesülnek.

Ezt az esetet illusztráljuk egy számpéldával!

Legyen $m = 60$ kg, $M = 30$ kg, $\mu = 0{,}5$, $l = 1$ m. (9) alapján ekkor $0 < < h \leq (2/3)$ m. Válasszuk pl. a $h = 0{,}5$ m-t, ekkor (8)-ból $(-1/2) \geq \operatorname{tg}\alpha \geq \geq (-2/3); (-26{,}6^\circ) > \alpha \geq (-33{,}7^\circ)$. Legyen pl. $\alpha = -30^\circ$, ekkor (10) alapján F nagyságát úgy kell megválasztanunk, hogy

$$243{,}5\ \text{N} \leq F \leq 268{,}8\ \text{N}.$$

III. Vizsgáljuk végül azt az esetet, amikor (2a) és (3a) teljesül, azaz, ha $\operatorname{tg}\alpha \leq 1/\mu$ és $\operatorname{tg}\alpha \geq \max\{(-h/l),\ (-1/\mu)\}$ egyidejűleg teljesül. (1) és (2), ill. (1) és (3) összeférhetőségének feltétele a korábban már megkapott (8) és (6) egyenlőtlenség, ezeket összevontan így írhatjuk:

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{M-m}{M+m} \leq \operatorname{tg}\alpha \leq \frac{1}{\mu} - \frac{2h}{l}. \tag{11}$$

A fenti feltételt kielégítő α választás akkor lehetséges, ha

$$\frac{1}{\mu}\frac{M-m}{M+m} \leq \frac{1}{\mu} - \frac{2h}{l}. \tag{12}$$

A (11)-nek eleget tevő α értékek esetén F olyan lehet, amelyre

$$\frac{\mu Mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} \leq F \leq \min\left\{\frac{\mu mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha},\ \frac{Mg}{2[(h/l)\cos\alpha + \mu\sin\alpha]}\right\}. \tag{13}$$

Az előbbieknek eleget tevő $F,\ \alpha,\ h$ esetén mindig teljesülnek az (1)–(3) feltételek.

Végezetül lássunk itt is egy számpéldát: $m = 60$ kg, $M = 120$ kg, $l = 1$ m, $\mu = 0{,}5$ esetén (12)-ből

$$h \le \frac{1}{\mu}\frac{m}{M+m} = \frac{2}{3}\,\mathrm{m}.$$

Válasszuk pl. a $h = 0{,}5$ m-t, ekkor (11)-ből $(2/3) \le \operatorname{tg}\alpha \le 1$, vagyis $33{,}7^\circ \le \le \alpha \le 45^\circ$. Legyen pl. $\alpha = 40^\circ$, ekkor (13) alapján F úgy választandó, hogy

$$551{,}8\ \mathrm{N} \le F \le 674{,}7\ \mathrm{N}$$

teljesüljön.

Tóth Mihály (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján