Mielőtt a feladat megoldásához kezdenénk, vizsgáljuk meg egy q ponttöltés ekvipotenciális felületeit. Tegyük fel, hogy a térben ezen ponttöltésen kívül más nincs is, azaz a töltés környezete vákuum. A potenciál a töltéstől r távolságra

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r},$$

ahol ε_0 a vákuum dielektromos állandója. Az ekvipotenciális felület egyenlete

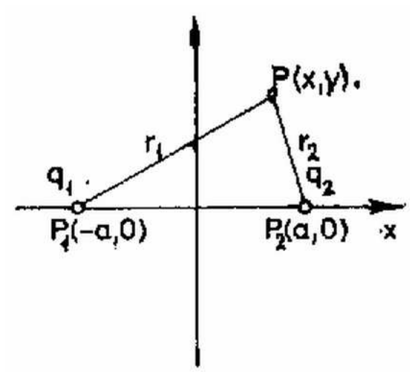
$$U(r) = \text{állandó}$$

amiből az

$$r = \text{állandó}$$

feltétel adódik, ami egy olyan r sugarú gömb egyenlete, amelynek középpontjában van a töltés. Így a ponttöltés valamennyi ekvipotenciális felülete gömbfelület.

Vizsgáljuk most a feladat szerinti elrendezést!



1. ábra

Tegyük fel, hogy ezeket a töltéseket is vákuum veszi körül. Jelöljük a P_1 és P_2 pontok közti távolságot $2a$-val és válasszuk úgy derékszögű koordináta-rendszerünket, hogy P_1 koordinátái legyenek $(-a, 0, 0)$, P_2 -é pedig $(a, 0, 0)$. Mivel az x tengely körül megforgatva a rendszert, az elrendezés mindig önmagába megy át, ezért elegendő az $x - y$ sík szemléltetése, az $y - z$ síkban minden felület metszete kör. Egy $P(x, y)$ pontban a potenciál (l. az 1. ábrát):

$$U(x,y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{r_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\right).$$

Vezessük be a következő jelölést: $q_1 = q$; $q_2 = kq$. Ekkor az ekvipotenciális felület $x - y$ síkkal való metszetének egyenlete:

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} + \frac{k}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = C,$$

ahol C állandó, arányos az U potenciállal.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen felületeket kapunk néhány speciális esetben.

a) Legyen $x - a \ll a$, $y \ll a$, vagyis vizsgáljuk az ekvipotenciális felületeket a P_2 pont közelében. Ez azt jelenti, hogy x értéke közelítőleg a, $x + a$ értéke közelítőleg $2a$, y pedig $2a$ mellett is elhanyagolhatóan kicsiny. Így az (1) egyenlet így írható:

$$(2) \qquad \frac{1}{2a} + \frac{k}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = C.$$

Mivel a bal oldal első tagja a feltételeink miatt jóval kisebb a második tagnál, ezért (2) helyett

$$\frac{k}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = C$$

írható, ami az

$$(x-a)^2 + y^2 = \text{állandó}$$

alakra hozható. Ez egy kör egyenlete, amelynek a középpontja a P_2 pont. Így biztosan vannak olyan ekvipotenciális felületek a P_2 pont körül (és hasonló módon belátható, hogy a P_1 pont körül is), amelyeknek az alakja gömb, mintha a másik töltés ott sem lenne, azonban ezen felületek sugara jóval kisebb, mint a. Ez érthető is, hiszen egy ponttöltéshez nagyon közel a tér többi töltésének hatása elhanyagolhatóan kicsi a ponttöltés saját teréhez képest (a Coulomb-erő a távolság négyzetével fordítottan arányos).

b) Legyen $k < 0$, azaz a két töltés legyen ellenkező előjelű. Keressük a nulla potenciálhoz tartozó ekvipotenciális felületet! (1) most a következőképpen alakul:

$$\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} = -\frac{k}{\sqrt{(x-y)^2+y^2}}.$$

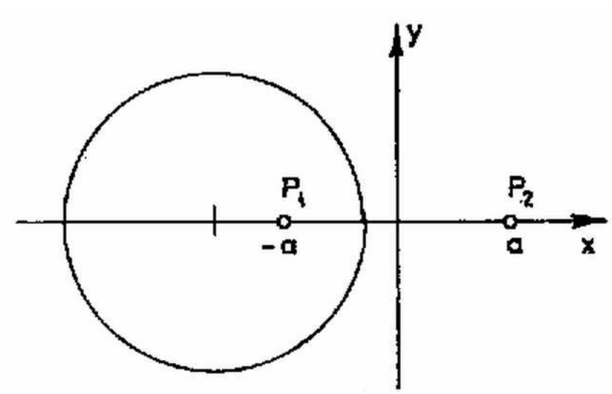
(k negatív, így mindkét oldal pozitív.) Az egyenlet reciprokát véve, négyzetre emelés és rendezés után kapjuk, hogy

$$k^2[(x+a)^2+y^2] = (x-a)^2+y^2, \tag{3}$$

ami a következő alakra hozható:

$$\left(x+a\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2ka}{k^2-1}\right)^2,$$

ami egy olyan kör egyenlete (ha $k \neq -1$), amelynek sugara $R_0 = -\dfrac{2ka}{k^2-1}$, középpontja pedig az x tengelyen, az $x_0 = -a\dfrac{k^2+1}{k^2-1}$ koordinátájú pontban van. Ezt a kört láthatjuk a 2. ábrán a $k=-2$ esetben $[x_0 = -(5/3)a,\ R_0 = (4/3)a]$, $k > -1$ esetén a kör (gömb) a P_2 pontot, vagyis a kisebb abszolút értékű töltést veszi körül.



2. ábra

Ha $k=-1$, akkor a (3) egyenletet nem szabad k^2-1-gyel elosztani, helyette (3)-ból

$$4ax = 0,$$

azaz $x = 0$ adódik. Ez éppen az $x-z$ sík egyenlete. Az ekvipotenciális felület ebben az esetben (a két töltés azonos nagyságú, de ellenkező előjelű) tehát a P_1P_2 szakaszt felező, a szakaszra merőleges sík.

c) Legyen $k \neq -1$. Keressük azt az ekvipotenciális felületet, amely jóval messzebb van a töltésektől, mint azok egymástól $(x, y \gg a)$! Ekkor az (1) egyenletben x mellett a elhanyagolható:

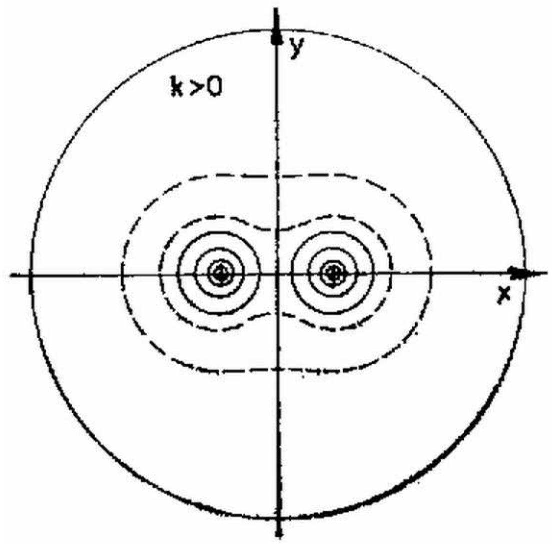
$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}} = C,$$

vagyis

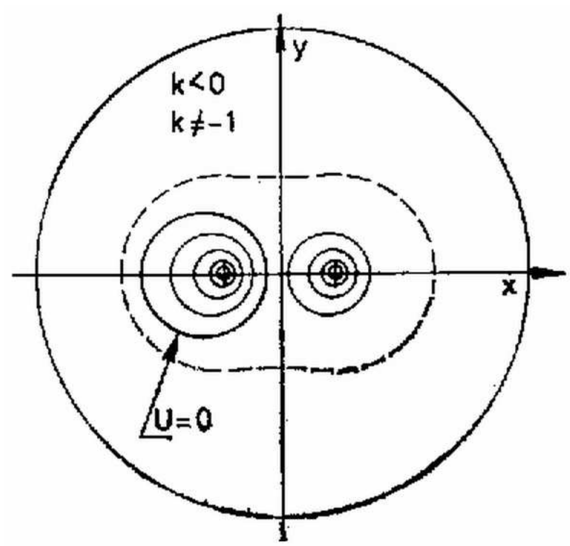
$$x^2+y^2 = \left(\frac{1+k}{C}\right)^2,$$

ami egy olyan kör egyenlete, amelynek középpontja koordináta-rendszerünk középpontja, azaz a P_1P_2 szakasz felezőpontja. Így, ha messze vagyunk a töltésektől, a tér már csak az eredő töltést veszi figyelembe, a töltések eloszlásának nincsen hatása az ekvipotenciális felületekre; az ekvipotenciális felületek a töltésektől messze gömbfelületek.

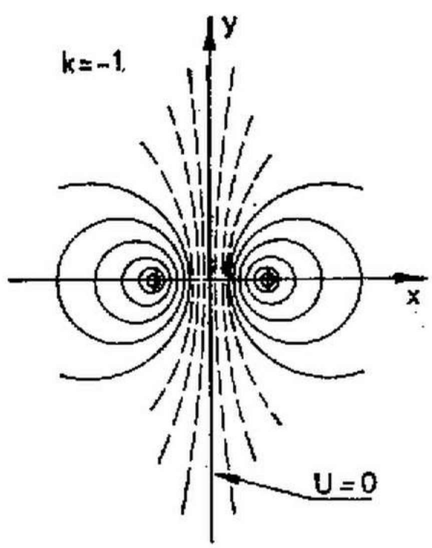
Mivel az (1) egyenletet általánosan megoldani nem tudjuk, meg kell elégednünk az eddig tárgyalt speciális esetekkel, ezek segítségével azonban közelítőleg mégis meg tudjuk rajzolni az ekvipotenciális felületeket. A 3., 4. és 5. ábrán szaggatott vonallal rajzoltuk ekvipotenciális felületek azon metszésvonalait, amelyeket a megoldásban nem számoltunk ki, amelyek alakját „érzés” alapján rajzoltuk meg. Segített a rajzolásban az is, hogy az ekvipotenciális felületet mindig merőlegesen metszi a térerősség iránya, azaz az erővonal.



3. ábra



4. ábra



5. ábra

A fentiekből az is egyértelműen látható, hogy minden esetben létezik ekvipotenciális felület, sőt az is igaz, hogy a P_1 és P_2 pontok kivételével a tér tetszőleges pontjára illeszkedik ekvipotenciális felület.

Drávucz Katalin (Szolnok, Verseghy F. Gimn., IV. o. t.)
dolgozata alapján