

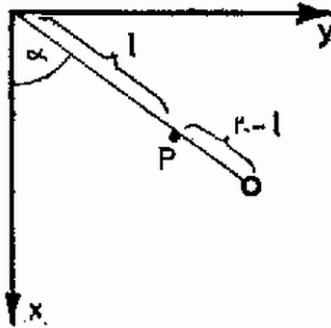
Az inga akkor tud körbefordulni, ha még a körpálya legfelső pontján is feszül a kótél, azaz

$$(1) \quad F_k = (mv^2/r) - mg \geq 0,$$

ahol F_k , a kötelet feszítő erő. Az (1) egyenlet feltételt ad a sebességre is

$$(2) \quad v \geq \sqrt{rg},$$

azaz (2)-nek kell teljesülnie, hogy az r sugarú, függőleges síkú körpályán végigmenjen a test. Legyen α az inga és a függőleges által bezárt szög akkor, amikor az inga eléri a P pontban levő szöget, r az inga hossza, l pedig a szög távolsága az inga felfüggesztési pontjától (1. ábra).



1. ábra

Az energiamegmaradás törvényének segítségével kiszámíthatjuk az inga sebességét, akkor, amikor az a szöget megkerülve pályája legfelső pontjába ér:

$$[l \cos \alpha - (r - l)]mg = mv^2/2.$$

Hogy az inga tömege körpályán maradjon, teljesülnie kell a (2) feltételnek (a körpálya sugara $r - l$), azaz

$$2[l \cos \alpha - (r - l)]g \geq (r - l)g,$$

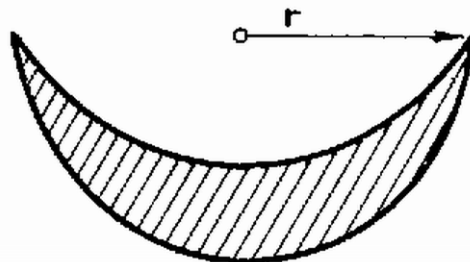
amit l -re megoldva kapjuk:

$$(3) \quad l \geq \frac{r}{1 + (2/3) \cos \alpha}.$$

A (3) egyenlőtlenség l -re α függvényében egy alsó korlátot ad. Van l -re egy felső korlátunk is, hiszen

$$(4) \quad l \leq r$$

lehet csak. A (3) és (4) egyenlőtlenség által meghatározott tartományon belül (2. ábra) bárhol lehet a szög.



2. ábra

A tartományt alulról az r sugarú félkör, míg felülről az

$$(3a) \quad l = \frac{r}{1 + (2/3) \cos \alpha}$$

egyenletű görbe határolja. A (3a) egyenletben nem mindenki ismeri fel azonnal az ellipszis egyenletét. Ezért az 1. ábrán megadott derékszögű koordináta-rendszerben is felírjuk a (3a) egyenletet. Ehhez l és α helyett bevezetjük az x és y változókat, felhasználva, hogy

$$(5) \quad l = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Ezeket az összefüggéseket (3a)-ba helyettesítve és rendezve, kapjuk:

$$9y^2 + 5x^2 + 12rx - 9r^2 = 0,$$

amit már könnyen átalakíthatunk az ellipszis normál egyenletének alakjára:

$$\frac{y^2}{[(3/\sqrt{5})r]^2} + \frac{[x + (6/5)r]^2}{(9r/5)^2} = 1.$$

Frei Zsolt (Pécs, Nagy Lajos Gimn., III. o. t.)