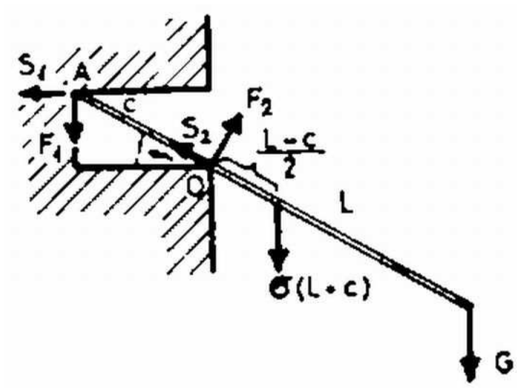
A pálcára ható erőket az 1. ábrán tüntettük fel. Tekintsük a súrlódási erőket akkor pozitívnak, ha az ábrán jelölt irányba mutatnak. Az erők vízszintes, ill. függőleges összetevőire vonatkozó egyensúlyi egyenletek:

(1) $$G + \sigma(L + c) + F_1 = F_2 \cos\alpha + S_2 \sin\alpha,$$

(2) $$S_1 + S_2 \cos\alpha = F_2 \sin\alpha.$$

Az egyenletek kényelmesebb rendezése érdekében a forgatónyomatékok egyensúlyát az O és az A pontra egyaránt felírjuk:



1. ábra

(3) $$F_1 c\cos\alpha + S_1 c \sin\alpha = \frac{\sigma}{2}(L^2 - c^2)\cos\alpha + GL\cos\alpha.$$

(4) $$F_2 c = \sigma(L + c)\frac{L + c}{2}\cos\alpha + G(L + c)\cos\alpha.$$

Az S_1 és S_2 tapadó súrlódási erőkre igaz, hogy

(5) $$|S_1| \le F_1\mu,$$

(6) $$|S_2| \le F_2\mu,$$

a nyomóerők pedig nem lehetnek negatívak:

(7) $$F_1 \ge 0,$$

(8) $$F_2 \ge 0.$$

A (4) egyenletből F_2 egyértelműen meghatározható. $F_1,\ S_1$ és S_2 azonban az egyenletrendszerből nem számítható ki, a feladat statikailag határozatlan. A következőkben S_1-et és S_2-t F_1-gyel fejezzük ki, majd megvizsgáljuk, hogy milyen $(F_1,\ L)$ értékpárok esetén elégíthetők ki az (5)–(7) egyenlőtlenségek.

S_1-et (3)-ból kifejezve, (5)-öt a $-F_1\mu \le S_1 < F_1\mu$ alakba írva és S_1 értékét behelyettesítve, a következő egyenlőtlenség adódik:

(9) $$F_1(1 - \mu\,\mathrm{tg}\,\alpha) \le \frac{\sigma}{2}\frac{L^2 - c^2}{c} + G\frac{L}{c} \le F_1(1 + \mu\,\mathrm{tg}\,\alpha)$$

A számadatokat cm-ben és N-ban behelyettesítve innen a

(9a) $$0 \le F_1 \le \frac{15}{14}\left(\frac{L^2}{\sqrt{40}} - \sqrt{40} + \frac{50}{\sqrt{40}}L\right)$$

(9b) $$F_1 \ge \frac{15}{16}\left(\frac{L^2}{\sqrt{40}} - \sqrt{40} + \frac{50}{\sqrt{40}}L\right)$$

egyenlőtlenségek adódnak. (9a) jobb oldala akkor pozitív, ha $L > 0{,}787$ cm.

S_2-t (2)-ből, F_2-t (4)-ből kifejezve és a (6) egyenlőtlenségbe írva, az alábbi egyenlőtlenségek adódnak:

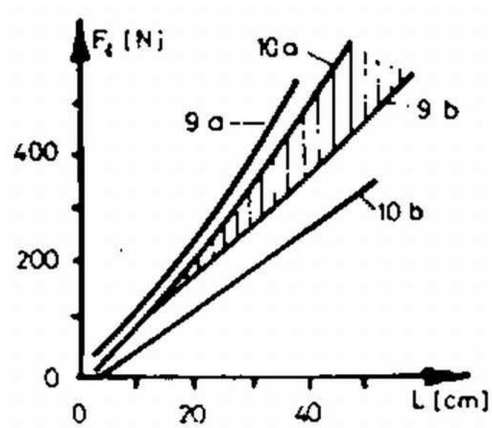
$$F_1 + \left[G\left(1 + \frac{L}{c}\right) + \frac{\sigma}{2}\ \frac{(L + c)^2}{c}\right]\sin\alpha\,\cos\alpha(\mu + \mathrm{tg}\,\alpha) \ge G\frac{L}{c} + \frac{\sigma}{2}\frac{L^2 - c^2}{c} \ge$$
$$\ge F_1 + \left[G\left(1 + \frac{L}{c}\right) + \frac{\sigma}{2}\ \frac{(L + c)^2}{c}\right]\sin\alpha\,\cos\alpha(\mathrm{tg}\,\alpha - \mu),$$

numerikusan

$$0 \leq F_1 \leq \frac{L^2-40}{\sqrt{40}} + \frac{50}{\sqrt{40}}L - \left[50\left(1+\frac{L}{\sqrt{40}}\right) + \frac{(L+\sqrt{40})^2}{\sqrt{40}}\right] \cdot \frac{1}{25} \tag{10a}$$

$$F_1 \geq \frac{L^2-40}{\sqrt{40}} + \frac{50}{\sqrt{40}}L - \left[50\left(1+\frac{L}{\sqrt{40}}\right) + \frac{(L+\sqrt{40})^2}{\sqrt{40}}\right] \cdot \frac{4}{25} \tag{10b}$$

(10a) jobb oldala akkor pozitív, ha $L > 1{,}117$ cm. A (9a), (9b), (10a) és (10b) egyenlőtlenségek által meghatározott tartományokat (kis torzítással) a 2. ábrán rajzoltuk fel.



2. ábra

Valamennyi egyenlőtlenség teljesül a bevonalkázott területen, így ennek bármely pontjához tartozó L és F_1 értékeket felhasználhatjuk arra, hogy az (1)–(4) egyenletek segítségével egy lehetséges egyensúlyi helyzetben fellépő erőket meghatározzuk.

A legkisebb L hosszúság a (10a) és (9b) egyenlőtlenségek határesetének metszéspontjához tartozik, az így adódó egyenletből akkor van megoldás, ha $L \geq 16{,}8$ cm, $L + c \geq 23{,}1$ cm.

Oszlányi Gábor (Miskolc, Földes F. Gimn., IV. o. t.)

Megyjegyzés. A legtöbb megoldó feltételezte, hogy a megcsúszás határhelyzetében S_1 és S_2 az 1. ábrán berajzolt irányú és maximális értékét veszi fel. Bár ez a feltevés jelen esetben helyesnek bizonyul, sokszor előfordul, hogy hasonló határozatlan feladatokban félrevezető eredményt szolgáltat. Nem ad lehetőséget arra sem, hogy a határesettől eltérő helyzeteket vizsgáljunk. Ezek a dolgozatok – ha egyébként hibátlanok voltak – 4 pontot kaptak.