

Legyen a rúd vízszintessel bezárt szöge α . A rúdra az 1. ábrán feltüntetett három erő hat: a G súlyerő, valamint az edény által a rúdra gyakorolt F_1 , illetve F_2 erő. Mivel a rendszerben nincs súrlódás, F_1 erő az edény falára merőleges hatásvonalú, F_2 pedig a rúd irányára merőleges hatásvonalú. A rendszer egyensúlyának feltétele, hogy e három erő hatásvonala egy ponton menjen át. Mivel F_1 sugárirányú, F_2 pedig a rúdra merőleges irányú, az erők hatásvonala Thales tétele miatt a 2. ábrán feltüntetett kör kerületén metszi egymást. OC szakasz merőleges BD -re, így $DC = CB$, ezért a DC íven nyugvó $\angle DAC$ egyenlő a CB íven nyugvó $\angle CAB$ -gel, azaz $\angle CAB = \alpha$. Innen

$$AB = 2R \cos 2\alpha.$$

Mivel $L = AP = AB / \cos \alpha$, az előző egyenletet felhasználva

$$L = \frac{2R \cos 2\alpha}{\cos \alpha}.$$

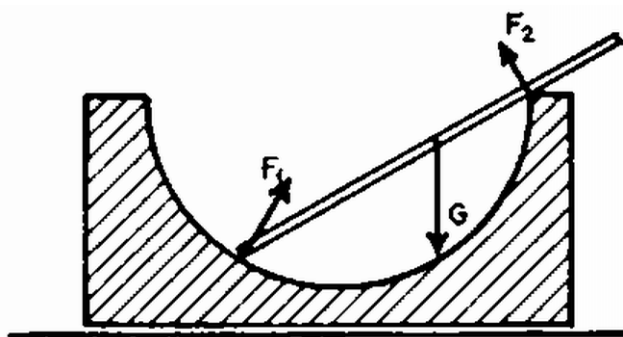
Az egyenletet $\cos \alpha$ -ra oldjuk meg:

$$\begin{aligned} L \cos \alpha &= 2R(2 \cos^2 \alpha - 1), \\ 4R \cos^2 \alpha - L \cos \alpha - 2R &= 0. \end{aligned}$$

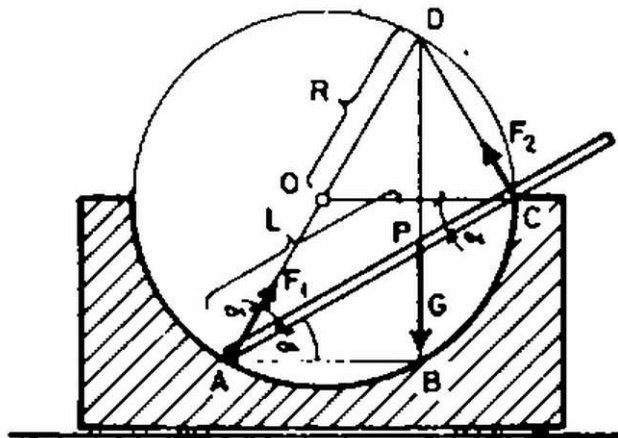
Innen

$$\cos \alpha = \frac{L + \sqrt{L^2 + 32R^2}}{8R}.$$

Az egyenlet másik gyöke $\cos \alpha$ -ra negatív értéket adna, de ez nem lehetséges, mivel α a vízszintessel bezárt szög, így $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$.



1. ábra



2. ábra

Most határozzuk meg a rúd lehetséges hosszát!

$$0 \leq \alpha \leq 90^\circ, \quad \text{így } 1 \geq \cos \alpha \geq 0, \quad \text{azaz}$$
$$1 \geq \frac{L + \sqrt{L^2 + 32R^2}}{8R} \geq 0.$$

Az egyenlőtlenség jobb oldala mindig teljesül. Vizsgáljuk az egyenlőtlenség bal oldalát! Átrendezve:

$$8R \geq L + \sqrt{L^2 + 32R^2}.$$

Innen $2L \leq 4R$ adódik.

A rúd minimális hosszának meghatározásához vizsgáljuk ismét a 2. ábrát! Jelölje P a G súlyerő támadáspontját! A rúd hossza $2L$, $AP = L$, így $PC \leq L$ kell, hogy teljesüljön.

Az ACD háromszögben $AC = 2R \cos \alpha$, így $PC = AC - L = 2R \cos \alpha - L$. Az előző egyenlőtlenségbe helyettesítve:

$$2R \cos \alpha - L \leq L, \quad \text{azaz}$$
$$R \cos \alpha \leq L.$$

A $\cos \alpha$ -ra kapott összefüggést felhasználva:

$$R \cdot \frac{L + \sqrt{L^2 + 32R^2}}{8R} \leq L.$$

Az egyenlőtlenséget rendezve $2R\sqrt{\frac{2}{3}} \leq 2L$ adódik.

A rúd vízszintessel bezárt szögének cosinusa tehát:

$$\cos \alpha = \frac{L + \sqrt{L^2 + 32R^2}}{8L},$$

lehetséges hossza pedig:

$$2R\sqrt{2/3} \leq 2L \leq 4R.$$

Fáth Gábor (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)