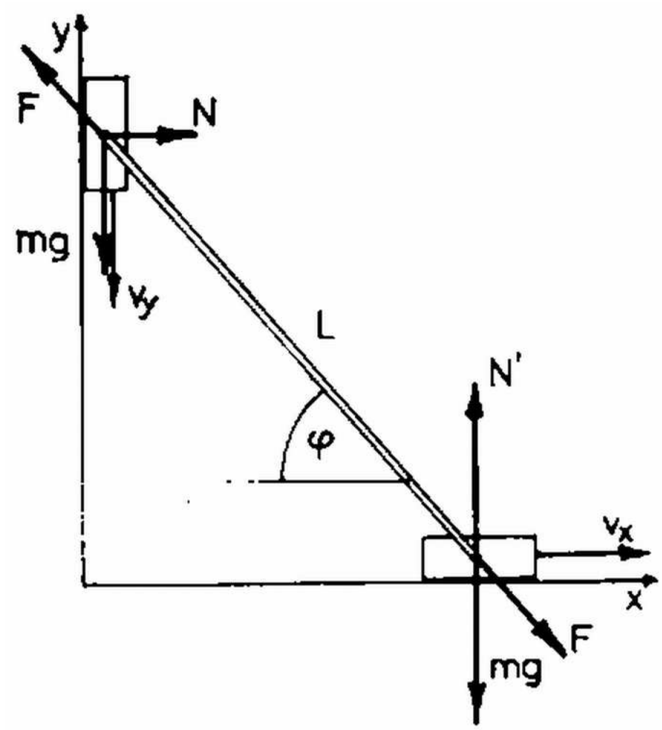
I. megoldás. A mozgás során a felső kiskocsi egyre kisebb erővel nyomja a falat, majd az elválás pillanatában N nullává válik (l. az ábrát).



Mivel a kiskocsi egészen eddig függőlegesen mozog, rá más vízszintes erő nem hathat, így meg kell, hogy szűnjék a rúdban ható erő is. Ennek megfelelően az elválás pillanatában a felső kiskocsi súlyereje hatására lefelé g gyorsulással mozog, az alsó kiskocsi pedig nem gyorsul, hiszen csak a rúderő vízszintes komponense gyorsíthatná vízszintesen. A kiskocsik sebessége és gyorsulása közötti összefüggéseket az

(1) $$x^2+y^2=L^2$$

kényszerfeltételből határozhatjuk meg, ahol x, ill. y a kiskocsiknak a fal és a talaj metszéspontjától mért távolsága. Deriváljuk kétszer az idő szerint az (1) összefüggést, felhasználva a szorzat differenciálási szabályát. (Az idő szerinti deriváltat szokás szerint ponttal jelöljük.)

$$2x\dot{x}+2y\dot{y}=0,$$

(2) $$x\dot{x}+y\dot{y}=0,$$

(3) $$\dot{x}^2+x\ddot{x}+\dot{y}^2+y\ddot{y}=0.$$

A bevezetőnek megfelelően a két kiskocsi gyorsulása az elválás pillanatában

(4) $$\ddot{x}=0,\quad \ddot{y}=-g.$$

$\dot{x}^2+\dot{y}^2$ a két kocsi sebességnégyzetének összege, az energiamegmaradás törvényéből határozható meg:

$$(1/2)m\dot{x}^2+(1/2)m\dot{y}^2=mg(L-y)=mgL(1-\sin\varphi),$$

azaz

(5) $$\dot{x}^2+\dot{y}^2=2gL(1-\sin\varphi).$$

(4)-et és (5)-öt (3)-ba helyettesítve, valamint $y=L\sin\varphi$-t beírva

$$2gL(1-\sin\varphi)-gL\sin\varphi=0,$$

ahonnan

(6) $$\sin\varphi=2/3\quad \varphi=41^\circ\,48'.$$

Az alsó kiskocsinak a faltól mért távolsága az elválás pillanatában

(6a) $$x=L\cos\varphi=L\cdot\sqrt{5}/3.$$

Felhasználva, hogy (2) alapján a sebességek között az

$$\dot{x} = -\dot{y}(y/x) = -\dot{y}\mathrm{tg}\varphi \tag{7}$$

összefüggés áll fenn, a kiskocsik sebessége az elválás pillanatában (5)-ből meghatározható. Az alsó kiskocsi távolodik a faltól

$$\dot{x} = \sqrt{(8/27)gL} \tag{8}$$

sebességgel, a felső kiskocsi lefelé mozog

$$-y = \sqrt{(10/27)gL}$$

sebességgel.

Takács László

II. megoldás. Az I. megoldás bevezetőjének megfelelően a felső kiskocsi elválásának pillanatában az alsó kiskocsi gyorsulása nulla, sebessége tehát ebben a helyzetben nem változik. Fejezzük ki az alsó kiskocsi sebességét a hely függvényében! A rúd pillanatnyi forgástengelyét a kiskocsik sebességére állított merőlegesek metszéspontja (P) adja. Az ábráról látható, hogy

$$v_y/x = v_x/y = \omega \tag{9}$$

a rúd szögsebessége. (v_x jobbra, v_y lefelé pozitív. Ugyanezt az összefüggést adta a (7) egyenlet is.) Az energiamegmaradás törvényéből

$$(1/2)mv_x^2 + (1/2)mv_y^2 = mgL - mgy,$$

(9)-et behelyettesítve és $x^2 = L^2 - y^2$-et írva

$$v_x^2 = (2g/L^2)(L-y)y^2. \tag{10}$$

Mivel v_x nem változik a felső kiskocsi elválásának pillanatában, v_x^2 y szerinti differenciálhányadosa nulla:

$$(2g/L^2)(2yL - 3y^2) = 0,$$

ahonnan a fizikailag érdekes gyök

$$y = 2L/3.$$

Innen $x = \sqrt{L^2 - y^2} = L \cdot \sqrt{5}/3$, a sebességek. (9)–(10)-ből számíthatók.

Sárközi Imre (Tata, Eötvös J. Gimn., IV. o. t.)
dolgozata alapján