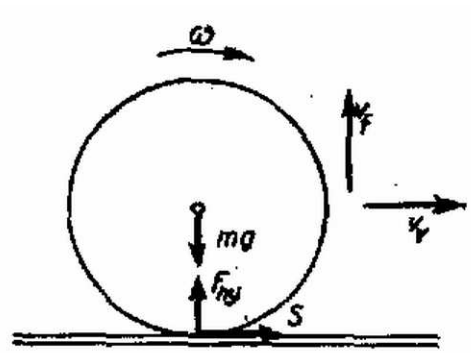
A pattogás során a golyó egyre nagyobb vízszintes sebességösszetevőhöz jut, miközben a forgó mozgás kerületi sebessége csökken. Ha a két sebesség kiegyenlítődik, vagyis $v_v = r\omega$, akkor ettől a pillanattól kezdve a golyó elméletileg a végtelenségig fog állandó vízszintes sebességöesszetevővel és állandó szögsebességgel forogva pattogni. A mozgás függőleges összetevője periodikus: a h magasságból szabadon eső golyó tökéletesen rugalmasan ütközve visszapattan és h magasságig emelkedik, majd újra visszaesik stb.

Vizsgáljuk az n-edik ütközést! A golyó $v_f = -\sqrt{2gh} = -v_0$ lefelé mutató függőleges sebességösszetevővel érkezik a lapra, és $v_f' = v_0$ felfelé mutató függőleges sebességgel hagyja el azt, az ütközés során a függőleges impulzus-változás $2\ mv_0$. Erről tudjuk, hogy

(1) $$2mv_0 = (\overline{F}_{ny} - gm)\Delta t \approx \overline{F}_{ny}\Delta t$$



1. ábra

($\overline{F}_{ny}$ a lap és a golyó között fellépő nyomóerőnek az ütközés Δt idejére vett átlaga,

$$\overline{F}_{ny} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} F_{ny}(t)\mathrm{d}t;$$

mivel az ütközés nagyon rövid ideig tart, az impulzusváltozás pedig véges nagyságú, F_{ny}-nak nagy értéknek kell lennie, ezért mellette mg elhanyagolható.) A vízszintes impulzusváltozást a súrlódási erő hozza létre, feltéve hogy a golyó az egész Δt idő alatt „köszörül” $\overline{S} = \mu F_{ny}$ és így

(2) $$m(v_{v,n} - v_{v,n-1}) = \mu \cdot \overline{F}_{ny} \cdot \Delta t = \mu \cdot 2mv_0,$$

tehát

(3) $$v_{v,n} = v_{v,n-1} + 2\mu v_0.$$

A súrlódási erő forgatónyomatéka a forgást fékezi:

(4) $$\Theta(\omega_n - \omega_{n-1}) = -r\mu F_{ny}\Delta t = -r \cdot 2\mu m v_0,$$

így

(5) $$\omega_n = \omega_{n-1} - \frac{5\mu v_0}{r}.$$

Itt felhasználtuk, hogy Θ a tömör gömbre $2\,mr^2/5$.

A (3) és (5) összefüggésekből a golyó n-edik ütközés utáni vízszintes sebessége és szögsebessége

(6) $$v_{v,n} = n \cdot 2\mu v_0,$$

(7) $$\omega = \omega_0 - n\frac{5\mu v_0}{r}.$$

Mindez akkor igaz, ha a golyó az n-edik ütközés teljes időtartama alatt köszörült, azaz

(8) $$v_{v,n} \leqq \omega_n r,$$

vagyis

(9) $$n \cdot 7 \cdot \mu \cdot v_0 \leqq \omega_0 r.$$

Mi történik, ha a (9) egyenlőtlenség $n-1$-re még igaz, de n-re már nem áll fenn (n lehet 1 is)? Ekkor az n-edik ütközés alatt, abban a pillanatban amikor vízszintes sebesség és a forgásból adódó kerületi sebesség azonossá válik, megszűnik a köszörülés, megszűnik a súrlódás, a golyónak sem vízszintes sebességösszetevője, sem a szögsebessége nem változik tovább. Nyilván a további pattogások során sem változnak ezek a mennyiségek. Legyen az F_{ny} erő átlaga arra a Δt^* időre, amíg az n-edik ütközés során a köszörülés tart, F^*_{ny} és legyen a beálló szögsebesség és vízszintes sebességösszetevő rendre ω^* és
v^*_r! Ekkor

(10) $$m(v^*_r - v_{v,n-1}) = \mu F^*_{ny}\Delta t^*,$$

(11) $$(2/5)mr^2(\omega^* - \omega_{n-1}) = -\mu F^*_{ny}\Delta t^*,$$

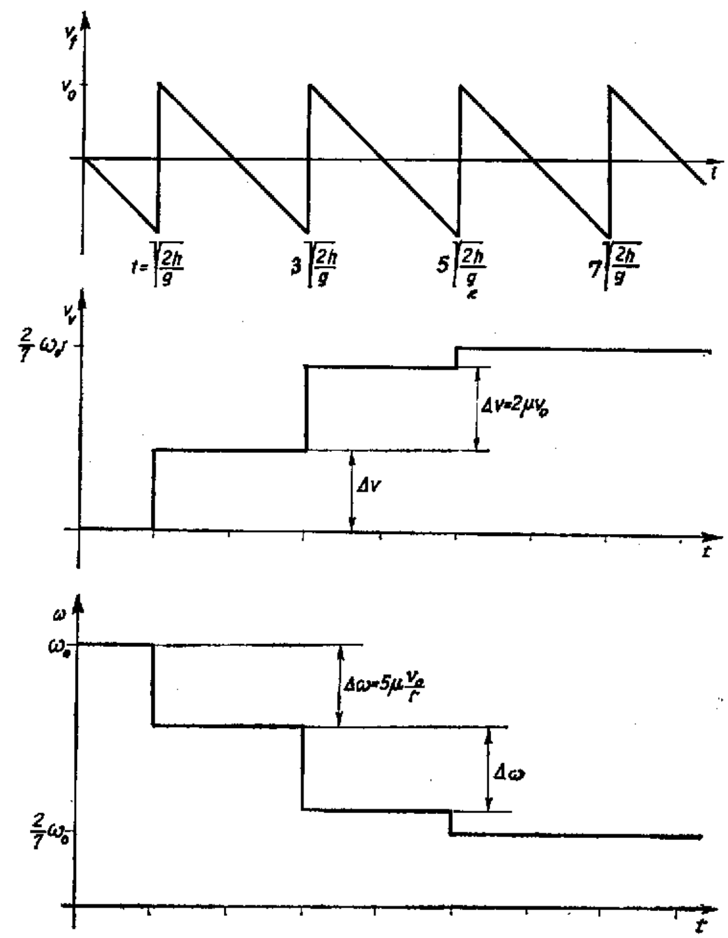
(12) $$v^*_v = \omega^* \cdot r.$$

A (10), (11) és (12) egyenletrendszer megoldása (6) és (7) felhasználásával:

(13) $$v^*_v = (2/7)\omega_0 \cdot r,$$

(14) $$\omega^* = (2/7)\omega_0.$$

Tehát a golyó vízszintes irányú sebessége minden ütközés során $2\mu\sqrt{2gh}$ értékkel nő, míg a szögsebessége $5\mu\sqrt{2gh}/r$ értékkel csökken. Ez egészen addig tart, amíg a sebesség el nem éri a $2\omega_0 r/7$, a szögsebesség pedig a $2\omega_0/7$ értéket, az ezután következő pattanások során már sem a vízszintes sebesség, sem pedig a szögsebesség nem változik. A 2. ábra a golyó v_f függőleges, v_v vízszintes sebességét, valamint az ω szögsebességét ábrázolja az idő függvényében.



2. ábra

Kovács Attila (Kalocsa, I. István Gimn., III. o. t.)

és *Oszlányi Gábor* (Miskolc, Földes F. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján