Az energiamérleget a legegyszerűbb felírni. Az 5 másodperces mozgás végén a lánc m tömegű, $h = 2{,}5$ m-es darabja lesz a levegőben, és 0,5 m/s-os állandó sebességgel mozog. Így a lánc helyzeti energiája

$$E_h = mgh/2,$$

míg a mozgási energiája

$$E_m = mv^2/2.$$

Célszerű felírni ugyanezen mennyiségeket egy $t \le 5$ s tetszőleges értékre. t idő alatt vt hosszúságú darab kerül a levegőbe, ennek súlypontja $vt/2$ magasan lesz, tömege pedig $vt\alpha$, ahol α az egységnyi hosszúságú lánc tömege. Tehát tetszőleges t időpontban a helyzeti és mozgási energia

$$E_h(t) = \frac{t^2v^2\alpha g}{2}, \quad E_m(t) = \frac{tv^3\alpha}{2}.$$

Először úgy tűnik, hogy a lánc felemelése során végzett munka az E_h és E_m, összegével egyenlő. Ez azonban nincs így. Hogy ezt megmutassuk, részletesebben meg kell vizsgálnunk a felemelés folyamatát. Tegyük fel, hogy a lánc elég kis szemekből áll, azaz egy láncszem tömege sokkal kisebb, mint a lánc teljes tömege. Mozogjon a lánc M' tömegű része már az egyenletes v sebességgel. Amikor a következő Δm tömegű láncszemet ráakasztjuk, az egy ütközési folyamatnak felel meg, hiszen a két tömeg különböző sebességgel mozgott és utána összekötöttük őket. A kölcsönhatás részleteitől függ, hogy mennyire rugalmas, illetve rugalmatlan az ütközés.

Abból a tényből, hogy a kötél egyes részei egymáshoz képest nem mozognak, arra lehet következtetni, hogy az ütközés tökéletesen rugalmatlan. Ha az ütközés rugalmatlan, akkor viszont energia vész el.

Számítsuk ki az energiaveszteséget! Az ütközés utáni közös sebességet (u) az impulzustételből számíthatjuk ki:

$$u = \frac{M'v}{M' + \Delta m}.$$

Az energiaveszteség:

$$\Delta E = \frac{1}{2}M'v^2 - \frac{1}{2}(M' + \Delta m)u^2 = \frac{1}{2}v^2\frac{M'\Delta m}{M' + \Delta m}.$$

Ha $\Delta m \ll M'$, akkor

$$\Delta E = (1/2)\Delta m v^2.$$

Ennyi energiaveszteség van tehát minden Δm tömegű láncszem felgyorsításakor, ezt a munkát is nekünk kell befektetnünk. A teljes munkavégzés tehát t idő múlva

$$W(t) = \frac{t^2v^2\alpha g}{2} + \frac{tv^3\alpha}{2} + \frac{tv^3\alpha}{2} = \alpha v^2 t\big[(gt/2) + v\big].$$

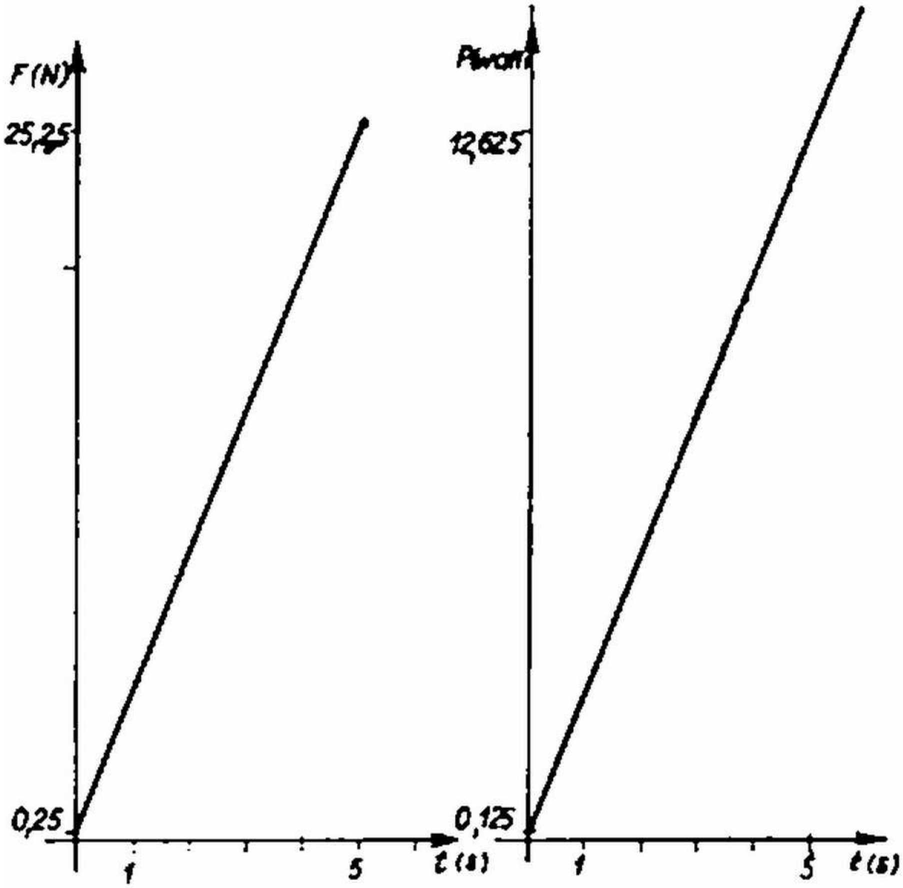
W ismeretében a teljesítmény:

$$P = \mathtt{d}W/\mathtt{d}t = v^2\alpha(gt + v).$$

Az emelőerőt a $P = Fv$ összefüggésből kaphatjuk meg:

$$F = v\alpha(gt + v).$$

Az emelőerőnek és teljesítményének időfüggése $\alpha = 1$ kg/m és $v = 0{,}5$ m/s értékeket használva az 1. ábrán látható.



1. ábra

5 másodperc elteltével az emelőerő megszűnik. A lánc azonban tovább fog mozogni, hiszen van mozgási energiája. Az energiamérleg felírásakor ismét vigyáznunk kell arra, hogy a mozgási energia nemcsak a helyzeti energia növelésére fordítódik, hanem az újonnan megmozdított láncszemek rugalmatlan ütközése is energiát emészt; az energiaveszteséget jelentő $\Delta m v^2/2$ tagot is figyelembe kellene vennünk. Ennek a tagnak a figyelembevételekor azonban meg kellene oldani a mozgásegyenletet, mert az elengedés pillanatától kezdve a lánc sebessége már nem állandó. A mozgásegyenlet egzakt megoldása meglehetősen nehéz. Vegyük azonban észre, hogy esetünkben a mozgási energia mindig jelentősen kisebb volt, mint a helyzeti energia. Mivel az energiaveszteség értéke éppen a mozgási energiával egyenlő, első közelítésben azt is elhanyagolhatjuk a helyzeti energia mellett. Ekkor viszont az energiamérleg:

$$(1/2)mv^2 + (1/2)mgh = (1/2)gs^2\alpha,$$

ahol $h = 2{,}5$ m a lánc elengedésének pillanatában a levegőben levő láncrész hossza, $m = 2{,}5$ kg a tömege, s pedig a lánc hossza a megállás pillanatában. Az adatokat behelyettesítve $s = 2{,}5125$ m adódik, azaz a lánc elengedése után még 1,25cm-t emelkedik.

Végül vizsgáljuk meg az asztal tartóerejét. A lánc emelése során az asztalon levő rész nyugalomban van. Az asztalt nyomó erő így az ott maradt rész súlyával egyenlő;

$$F_{ny} = (l_0 - tv)\alpha g,$$

ahol $l_0 = 3$ m a lánc eredeti hossza. Jóval nehezebb a lánc elengedése utáni nyomóerő kiszámítása. A lánc elengedése után még 1,25 cm-t felfelé mozog, majd megindul visszafelé szabadeséssel. Az asztal tartóereje részben a már ott nyugalomban levő láncrész súlyának ellensúlyozására fordítódik, részben az asztalra eső láncszemek lefékezésére.

A lánc szabadeséssel mozog lefelé, így az esés kezdetétől számítva t idő múlva

$$l' = (g/2)t^2$$

hosszú része lesz az asztalon nyugalomban. Számoljuk ki a fékezéshez szükséges erőt. A láncszemek az asztalhoz ütközve ott megállnak, azaz tökéletesen rugalmatlanul ütköznek. Impulzusuk az ütközés ideje alatt nullára csökken. Tegyük fel, hogy az ütközés során állandó erő hat. Ekkor

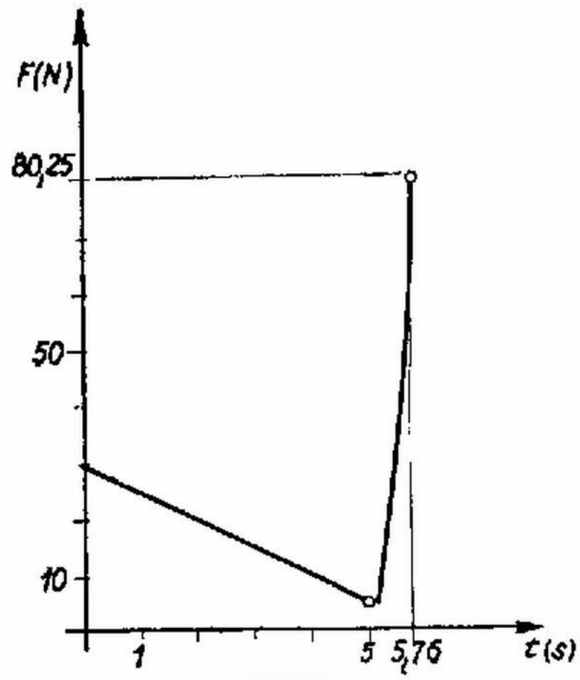
$$\overline{F}\Delta t = mv.$$

ahol $\overline{F}$ az állandó átlagos erő, Δt az ütközés ideje, m a földnek ütköző részecskék tömege, v pedig sebességük. Határozzuk meg F-et egy tetszőleges t időpontban! Legyen Δt olyan kicsi, hogy azalatt a lánc sebessége állandónak vehető.

A lánc sebessége az elengedés után t-vel $v = gt$. Δt idő alatt $\Delta l = gt\Delta t$ láncdarab jut le az asztalra, azaz az ütköző tömeg $m = \alpha \cdot \Delta t \cdot gt$, ezzel az átlagos erő:

$$\overline{F} = \frac{\alpha \cdot \Delta t \cdot gt \cdot gt}{\Delta t} = \alpha \cdot g^2 t^2.$$

Az asztal teljes tartóerejét a 2. ábrán ábrázoltuk.



2. ábra

Mint látjuk, a maximális tartóerő jelentősen több, mint ami súlyerő ellensúlyozásához szükséges. Természetesen a lánc megállása után az asztal tartóereje pillanatszerűen 30 N-ra ugrik vissza.

Oszlányi Gábor (Miskolc, Földes F. Gimn. III. o. t.)
dolgozata alapján