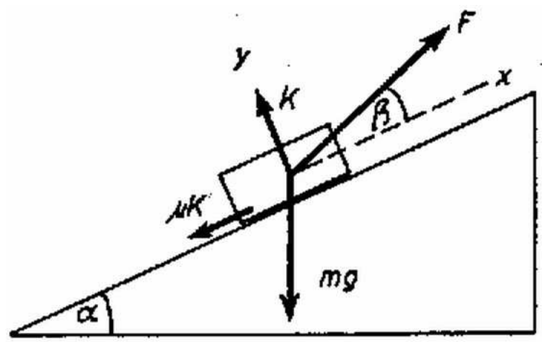
Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a láda a gyorsulással mozog a lejtőn felfelé, ahol $a \geq 0$. Ekkor a ládára ható erőket az ábra szemlélteti.



Legyen a láda tömege m, a húzóerő nagysága F, ennek lejtő irányú komponense F_x, a lejtőre merőleges komponense F_y, az F erő lejtővel bezárt szöge β (l. az ábrát). Írjuk fel a ládára ható lejtő irányú, illetve lejtőre merőleges erők egyensúlyát:

(1) $$mg\sin\alpha + \mu K + ma = F_x,$$

(2) $$K + F_y = mg\cos\alpha,$$

ahol K a ládára ható nyomóerő. A (2) egyenletből adódik a

(3) $$K = mg\cos\alpha - F_y \geq 0$$

megkötés. A feladatunk

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

minimalizálása. (1), (2)-ből F_x-re és F_y-ra kapjuk:

(4) $$mg\sin\alpha + \mu(mg\cos\alpha - F_y) + ma = F_x.$$

F akkor minimális, ha négyzete minimális.

$$F^2 = \left[mg\sin\alpha + \mu(mg\cos\alpha - F_y) + ma\right]^2 + F_y^2 =$$
$$= F_y^2(1+\mu^2) - F_y(2\mu\, mg\,\sin\alpha + 2\mu^2 mg\cos\alpha + 2\mu\, ma) + m^2g^2\sin^2\alpha +$$
$$+\mu^2m^2g^2\cos^2\alpha + m^2a^2 + 2\mu m^2g^2\sin\alpha\cos\alpha + 2m^2ga\ \sin\alpha + 2\mu m^2ga\ \cos\alpha.$$

Ez F_y-nak másodfokú függvénye, amelyben a négyzetes tag együtthatója pozitív. Így F_y^2 csakugyan felveszi minimumát. Mivel a minimum helye független a konstans tagtól, elég az

(5) $$F_y^2(1+\mu^2) - F_y(2\mu mg\sin\alpha + 2\mu^2mg\cos\alpha + 2\mu ma)$$

kifejezést vizsgálni. Tudjuk, hogy egy parabola minimumhelye gyökhelyeinek számtani közepe. (5) gyökhelyei 0 és

$$\frac{2(\mu mg\sin\alpha + \mu^2 mg\cos\alpha + \mu ma)}{1+\mu^2},$$

így a minimumhely

$$F_y^* = \frac{\mu mg\sin\alpha + \mu^2mg\cos\alpha + \mu ma}{1+\mu^2},$$

átalakítva

$$F_y^* = \frac{\mu m}{1+\mu^2}(g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha + a),$$

feltéve, hogy teljesül (3), azaz ha $(g/\mu)(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) \geq a$. (4) alapján

$$F_x^* = \frac{m}{1+\mu^2}(g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha + a), \quad \text{így} \quad \operatorname{tg}\beta = \mu.$$

Így F irányának a vízszintessel bezárt szöge $\gamma = \alpha + \beta = \alpha + \operatorname{arc\,tg}\mu$. Ez akkor jó megoldás, ha $\gamma \leq 90°$. Ez most teljesül, ugyanis ha $\gamma > 90°$, akkor $\alpha > 90° - \beta$ adódik, majd mindkét oldal tangensét véve: $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{ctg}\beta$, innen $\operatorname{ctg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$, ebből pedig $\cos\alpha - \mu\sin\alpha < 0$ adódik, de ekkor $(g/\mu)(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) < 0$ lenne, így $(g/\mu)(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) \geq a$ nem teljesülne.

Most vizsgáljuk azt az esetet, amikor $a > (g/\mu)(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)$. Ebben az esetben is teljesülnek az (1), (2) egyenletek, de most a minimális F-et nem tudjuk úgy meghatározni, mint az előbb. Ebben az esetben ugyanis ha az előző módon számolnánk F értékét, azt kapnánk, hogy a láda elhagyja a lejtőt. Az kell tehát, hogy $F_y \leq mg\cos\alpha$ teljesüljön, és F e mellett a feltétel mellett legyen minimális. Mivel a szóban forgó másodfokú függvény $(-\infty, F_y^*)$ intervallumon szigorúan monoton csökken, F akkor lesz minimális, ha F_y-t a lehető legnagyobbnak, tehát $mg\cos\alpha$-nak választjuk. Ekkor pedig $F_x = mg\sin\alpha + ma$ adódik, így $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{g\cos\alpha}{g\sin\alpha + a}$. Ebben az esetben tehát $\gamma = \alpha + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{g\cos\alpha}{g\sin\alpha + a}$, feltéve, hogy $\gamma \leq 90^\circ$. Ez most is teljesül, ami a következő átalakításokból látszik. Ha $\gamma > 90^\circ$, akkor $\alpha > 90^\circ - \beta$, így $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{ctg}\beta$, de ekkor $g\sin\alpha > g\sin\alpha + a$, vagyis $0 > a$, de feltételünk szerint ez nem lehetséges.

A feladat megoldása tehát tetszőleges $a \geq 0$ esetén:

$$\gamma = \alpha + \operatorname{arc\,tg}\mu, \quad \text{ha } (g/\mu)(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) \geq a.$$

és

$$\gamma = \alpha + \operatorname{arc\,tg}\frac{g\cos\alpha}{g\sin\alpha + a}, \quad \text{ha } (g/\mu)(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) < a.$$

Mandula Gábor (Budapest, Radnóti M. Gyak. Gimn., II. o. t.)