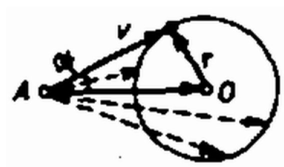
I. megoldás. Két részecske rugalmas ütközését célszerű tömegközépponti rendszerben vizsgálni, mivel ebben a koordinátarendszerben a részecskék sebességének abszolút értéke változatlan marad, csak irányuk változik meg. Legyen az M tömegű részecske ütközés előtti sebessége a laboratóriumban rögzített koordinátarendszerben v_0. Ekkor a tömegközéppont sebessége $\mathbf{v}_{TK} = \mathbf{v}_0 M/(M+m)$. A tömegközépponti rendszerben az M tömeg ütközés előtti sebessége $\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{TK}$, ütközés utáni sebessége $|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{TK}| \cdot \mathbf{e}$, ahol $\mathbf{e}$ egy egységvektor, amelynek lehetséges irányait az impulzusmegmaradás határozza meg. Visszatranszformálva a laboratóriumi koordinátarendszerbe, az ütközés utáni sebesség:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{TK} + |\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{TK}|\mathbf{e} = \mathbf{v}_0 \frac{M}{M+m} + v_0 \frac{m}{M+m}\,\mathbf{e}. \tag{1}$$

Ábrázoljuk geometriailag az (1) egyenlettel adott vektor összeadást (1. ábra).



1. ábra

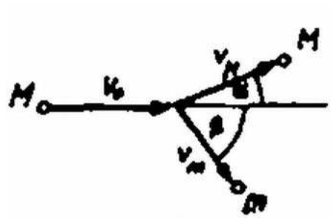
A $\mathbf{v}$ vektor kezdőpontja A, végpontja egy O középpontú, $r = v_0 m/(M+m)$ sugarú gömbön van, $\overline{AO} = v_0 M/(M+m)$. Mivel $M > m$, A a gömbön kívülre esik. M sebességének az iránya akkor változik a legtöbbet, ha $\mathbf{v}$ egyenese érinti a gömböt, ekkor

$$\sin\alpha = r/\overline{AO} = m/M. \tag{2}$$

Beláthatjuk, hogy ez az eltérülési szög valóban megvalósítható

Sáfár Péter (Debrecen, Tóth Á. Gimn. III. o. t.)

II. megoldás. Tegyük fel, hogy az ütközés után M sebessége α. m sebessége β szöget zár be M $\mathbf{v}_0$ kezdősebességével (2. ábra).



2. ábra

Felírhatjuk az impulzus és az energia megmaradását kifejező egyenleteket:

$$M v_M \sin\alpha = m v_m \sin\beta \tag{3}$$

$$M v_0 = M v_M \cos\alpha + m v_m \cos\beta \tag{4}$$

$$(1/2) M v_0^2 = (1/2) M v_M^2 + (1/2) m v_m^2. \tag{5}$$

Az egyenletrendszerből kifejezhetjük α-t β függvényében:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\beta}{(M/m) - \cos 2\beta}. \tag{6}$$

Deriválással megkaphatjuk azt a β szöget, amelynél $\operatorname{tg}\alpha$ maximális, erre $\cos 2\beta = (m/M)$ adódik. (6)-ba visszahelyettesítve a részecske maximális eltérülési szögére adódik:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{\sqrt{M^2 - m^2}}, \quad \text{azaz} \ \sin\alpha = m/M. \tag{7}$$

Lakatos Róbert (Kalocsa, I. István Gimn. III. o. t.)