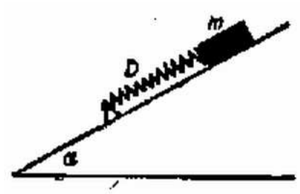


Ha a test elmozdulása $x \leqq l_0/2$, akkor a test rátámaszkodik a rugóra, és így a testre a következő erők hatnak: a lejtővel párhuzamosan a súlyerő $mg\sin\alpha$ nagyságú komponense, a $\mu mg\cos\alpha$ nagyságú csúszási súrlódási erő és a $D\big[(l_o/2)-x\big]$ nagyságú rugóerő. Feltesszük, hogy a test felfelé mozog, így a súrlódási erő lefelé hat. Annak feltétele, hogy a test felfelé meginduljon az, hogy az elengedés pillanatában a testre ható erők eredője a lejtővel párhuzamosan felfelé mutasson:

(1) $$D(l_0/2) > mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

A test mozgásegyenlete ekkor

(2) $$ma = \big[(l_0/2) - x\big] - mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Ez egy harmonikus rezgőmozgás egyenlete, amelynek nyugalmi helyzete (ahol $a = 0$):

(3) $$x_0 = (l_0/2) - (mg/D)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Mivel a mozgás a rezgés szélső helyzetéből indul, x_0 egyúttal a rezgés amplitúdója. Két eset lehetséges: a test legmagasabb helyzetében is összenyomja a rugót (a) vagy a mozgás közben a rugó teljesen kinyúlik és a test lerepül róla (b).

a) Ha a test végig a rugón marad, a legmagasabb helyzet eléréséig egy fél rezgést végez, teljes elmozdulása $2x_0$, maximális emelkedési magassága

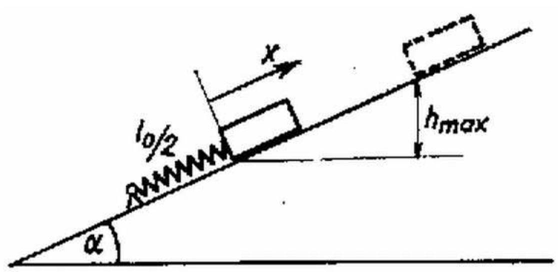
(4) $$h_{\max} = 2x_0\sin\alpha = \big[l_0 - (2mg/D)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\big]\sin\alpha.$$

Ezt a helyzetet a rezgésidő fele alatt éri el a test, tehát

(5) $$t = \pi\sqrt{m/D}.$$

Ez az eset akkor valósul meg, ha $2x_0 \leqq l_0/2$, ahonnan

(6) $$l_0/4 \leqq (mg/D)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$



b) Ha az (a) feltétel nem teljesül, akkor a test a mozgás elején a rugóval együtt harmonikus rezgőmozgást végez, majd a rugótól elszakadva a lejtőn csúszva egyenletesen lassul. Számítsuk ki, hogy mikor hagyja el a test a rugót és mekkora ebben a pillanatban a sebessége! Az elengedéstől számítva a test elmozdulása az idő függvényében egy x_0 középpontú harmonikus rezgőmozgás, amelynek amplitúdója x_0 és kiindulópontja az egyik szélső helyzet:

(7) $$x = -x_0\cos\omega t + x_0,$$

ahol $\omega = \sqrt{D/m}$. A rugó elhagyásának pillanatában az elmozdulás $x(t_1) = l_0/2$, ahonnan x_0 és ω értékét behelyettesítve;

(8) $$t_1 = \sqrt{\frac{m}{D}}\ \text{arc}\ \cos\frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) - (l_0D/2)}.$$

A test sebességét legegyszerűbben a munkatételből határozhatjuk meg. A kezdeti rugóenergia helyzeti és mozgási energiává alakul, illetve súrlódási munkára fordítódik:

(9) $$(1/2)D(l_0/2)^2 = mg\ (l_0/2)\sin\alpha + \mu mg(l_0/2)\cos\alpha + (m/2)v_1^2,$$

innen

$$v_0 = \sqrt{(Dl_0^2/4m) - l_0 g\ (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}. \tag{10}$$

Ettől a ponttól kezdve a test $g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ állandó gyorsulással lassul a legmagasabb helyzetig, így a rugó elhagyásától a megállásig

$$t_2 = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$

idő telik el; az elindulástól eltelt idő $t_1 + t_2$.

A maximális magasság elérésekor a test megáll, a kezdeti rugóenergia helyzeti energiává és súrlódási munkává alakul:

$$(1/2)D(l_0/2)^2 = mgh_{\max} + \mu mg\cos\alpha \cdot \frac{h_{\max}}{\sin\alpha}, \tag{11}$$

ahonnan az emelkedési magasság:

$$h_{\max} = \frac{D(l_0^2/8)}{mg(1 + \mu\ \mathrm{ctg}\ \alpha)}. \tag{12}$$

Kuna János (Törökszentmiklós, Bercsényi M. Gimn., III. o. t.)