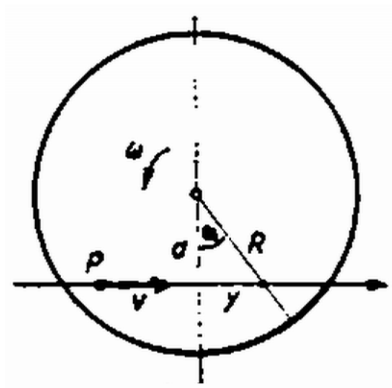
Rögzítsük a koordináta–rendszerünket a $v = 36$ km/h sebességgel haladó kerékpárhoz. Jelöljük P-vel azt a pontot, ahol a nyílvessző döfi a kerék síkját (1. ábra).



1. ábra

A nyílvessző áthaladása során a P pont a földhöz képest nyugalomban van, tehát koordináta–rendszerünkben v sebességgel mozog. Feltesszük, hogy a kilövés helye nincs a kerék síkjában, hiszen ekkor a nyílvessző nem tudna áthaladni a küllők közt. Ha a nyílvessző sebessége u, akkor az áthaladás ideje $T = 10$ cm/u függetlenül attól, hogy milyen irányból lőtték ki, ha a kerék szélessége elhanyagolható a nyílvessző hosszához képest. Azt keressük, hogy mekkora a minimális u. Ez ugyanaz, mintha azt keresnénk, mekkora a minimális T. A feladatot a következőképpen fogalmazhatjuk meg. Egy álló középpontú, v;kerületi sebességgel forgó küllős kerék belsejében kell egy v sebességű P pontnak mozognia a lehető leghosszabb ideig úgy, hogy ne messe sem a küllőket, sem a kerék kerületét. A kerék felső felében nem érdemes a megoldást keresnünk, mert a küllők és a P pont szembe mozognak, így hamarabb találkoznak, mint hasonló helyzetben a kerék alsó felén, ahol egy irányban mozognak. Az egyenesnek, amelyen a P pont mozog: a kerék középpontjától mért távolságát jelöljük a-val. Vizsgáljuk most meg, hogy a P pont előtt levő küllő és az egyenes metszéspontja hogyan mozog az egyenesen:

$$y_1 = a\ \mathrm{tg}\alpha = a\ \mathrm{tg}\ \omega t.$$

Ugyanígy felírhatjuk az egyenletet arra a küllőre is, amely $10°$-kal hátrább van:

$$y_2 = a\ \mathrm{tg}[\omega t - (\pi/18)].$$

Egyszerűen felírhatjuk a P pont mozgását is:

$$y_3 = vt + k = R\omega t + k,$$

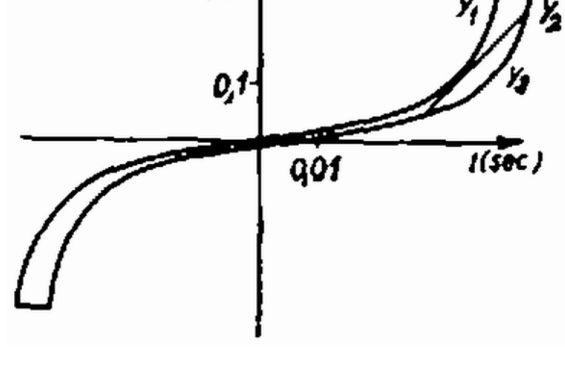
ahol k jelenti azt, hogy a nulladik időpillanatban hol helyezkedik el a P pont. Figyelembe kell vennünk a kerék kerülete szabta határt is. A Pitagorasz–tételt használva:

$$y^2 \leqq R^2 - a^2.$$

Az alatt a T idő alatt, amíg a nyílvessző áthalad a keréken, a következő feltételeknek kell teljesülniük:

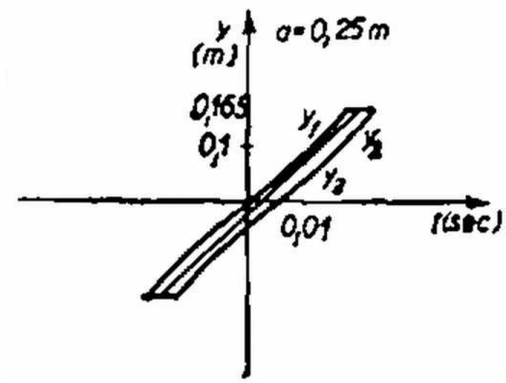
$$y_2 \leqq y_3 \leqq y_1 \quad \text{és} \quad |y_i| \leqq \sqrt{R^2 - a^2} \quad i = 1, 2, 3.$$

Az y_i függvényeket ($i = 1, 2, 3$) ábrázolva a következőképpen fogalmazhatjuk meg ismét a feladatot. Milyen a, k paraméterek mellett lesz az y_1 és y_2 görbékkel, valamint az $y = \pm\sqrt{R^2 - a^2}$ egyenesekkel határolt területnek a leghosszabb metszete az y_3 egyenessel. Ha a kicsi, akkor a tartomány erősen görbül, ezért csak rövid $v = R, \omega$ meredekségű szakasz húzható bele (1. a 2. ábrát).



2. ábra

Ha pedig a nagy, akkor a tartományba eső v meredekségű szakasz hosszát az egymástól egyre kisebb távolságra levő határoló egyenesek határozzák meg, a tangens görbét még csak érintenie sem kell (1. a 3. ábrát).



3. ábra

Leghosszabb tehát akkor lesz a szakasz, ha úgy húzható meg, hogy éppen mindkét tangens görbét érintse.

Jelöljük ennek az egyenletét y_3^*-gal. A t tengelyt az y_2 görbe a $\Delta t = \dfrac{\pi/18}{\omega}$ pontban metszi. A szimmetria miatt az y_3^* egyenes az időtengelyt $\Delta t/2$-ben, azaz $\pi/(36\omega)$-ban metszi, azaz

$$0 = R\omega(\Delta t/2) + k. \quad \text{Ebből} \quad k = \frac{R\pi}{36}, \quad \text{tehát} \quad y_3 = R\left(\omega t - \frac{\pi}{36}\right).$$

Deriváljuk y_1-et t szerint: $y_1 = \dfrac{a\omega}{\cos^2 \omega t}$ Az érintési pontban az y_1 görbe meredeksége is $R\omega$ lesz. Ezért ha az érintési ponthoz tartozó időt t^*-gal jelöljük:

$$\frac{a\omega}{\cos^2 \omega t^*} = R\omega. \tag{1}$$

Az érintés miatt a t^* időpontban $y_1 = y_3^*$, tehát

$$a \text{ tg } \omega t^* = R\left(\omega t^* - \frac{\pi}{36}\right).$$

Az (1) és (2) egyenletekből a-t kiküszöbölve:

$$R\cos^2 \omega t^* \text{ tg } \omega t^* = R[\omega t^* - (\pi/36)],$$

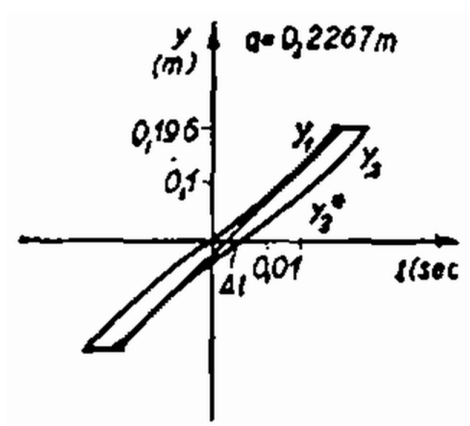
átalakítva

$$2\cos \omega t^* \sin \omega t^* = 2[\omega t^* - (\pi/36)],$$

azaz

$$\sin 2\omega t^* - 2\omega t^* + (\pi/18) = 0.$$

Ezt az egyenletet pl. próbálgatással megoldva azt kapjuk, hogy $t^* = 0,0155$ s (1) felhasználásával $a = 0,22674$. A görbéket felrajzolva a 4. ábrán láthatjuk, hogy az optimális szakasz az $y = \pm\sqrt{R^2 - a^2}$ egyeneseket eléri, tehát a P pont által megtett út $s = 2\sqrt{R^2 - a^2} = 0,392$ m.



4. ábra

Felhasználva, hogy $T = \frac{s}{v} = \frac{0,392 \text{ m}}{10 \text{ m/s}} = 0,0392$ s, $u = 10$ cm$/T = 2,55$ m/s.

A 4. ábráról azt is leolvashatjuk, hogy P pont közvetlenül a kerék kerületét érintve indul, ezután a mögötte levő küllő utoléri, megérinti, majd lemarad, ezután a P pont éri utol az előtte levő küllőt, megérinti, majd lemarad mögötte, végül a kerék kerületét ismét elérve fejezi be a mozgást.

Tehát a nyílvessző minimális sebessége $2,55$ m/s és a kerék tengelyétől $a = 22,6$ cm-rel lejjebb kell belőni közvetlenül a kerék kerülete mellett, és mindegy, hogy milyen irányból lőjük be. **Lugosi Erzsébet**

Megjegyzés. A hibás dolgozatok oka többnyire az volt, hogy a megoldók nem vették figyelembe, hogy a nyílvessző döféspontja (P pont) mozog a kerékhez képest, azaz az 510. számú gyakorlatot oldották meg.