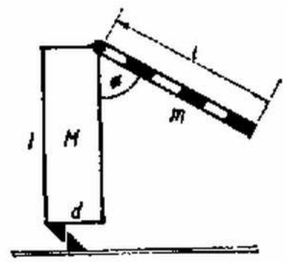
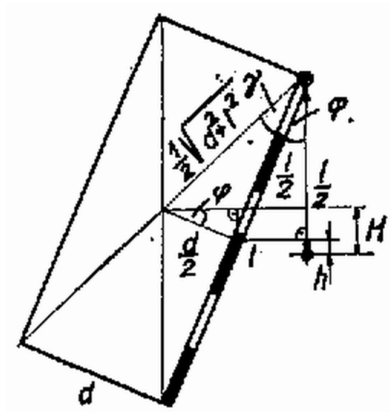


A csapó léc elengedése után helyzeti energiája forgási energiává alakul át. A léc tömegközéppontjának süllyedése: $(l/2)-(l/2)\cos\alpha$ (l. az ábrát).



Felírhatjuk tehát, hogy

$$mg(l/2)(1-\cos\alpha)=(1/2)\Theta_m\omega_1^2,$$

ahol $\Theta_m=(1/3)ml^2=3\cdot10^{-3}$ kgm^2 a léc tehetetlenségi nyomatéka, és ω_1 a szögsebessége az ütközés pillanatában. A fentiekből megkapjuk ω_1-et:

$$\omega_1=\sqrt{\frac{3g(1-\cos\alpha)}{l}}=7\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Most számítsuk ki a téglalap alakú lemeznek a felfüggesztési pontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát. A függvénytáblázatban megtalálható a tömegközéppontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték: $(1/12)M(l^2+d^2)$. A tömegközéppont és a felfüggesztés távolsága $\sqrt{d^2+l^2}/2$. A Steiner-tételt használva:

$$\Theta_m=\frac{1}{12}M(l^2+d^2)+M\frac{d^2+l^2}{4}=\frac{1}{3}M(d^2+l^2)=1{,}66\cdot10^{-2}\ \mathrm{kgm}^2.$$

Vizsgáljuk először az *a)* esetet, amikor az ütközés teljesen rugalmas. Ekkor felírhatjuk az ütközésre a forgásmennyiség és az energia megmaradására vonatkozó egyenleteket. Jelölje ω_m, ill. ω_M a testek ütközés utáni szögsebességét. Így

$$\omega_1\Theta_m=\omega_m\Theta_m+\omega_M\Theta_M,$$
$$(1/2)\Theta_m\omega_1^2=(1/2)\Theta_m\omega_m^2+(1/2)\Theta_M\omega_M^2.$$

Az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy

$$\omega_m=\frac{\omega_1(\Theta_m-\Theta_M)}{\Theta_m+\Theta_M}=-4{,}86\frac{1}{\mathrm{S}};$$
$$\omega_M=\frac{2\Theta_m\omega_1}{\Theta_m+\Theta_M}=2{,}14\frac{1}{\mathrm{S}}.$$

Ismét az energiamegmaradást felhasználva, kapjuk a léc, illetve a lemez emelkedési magasságát:

$$mgh=(1/2)\Theta_m\omega_m^2,\qquad MgH=(1/2)\Theta_M\omega_M^2,$$

amiből

$$h=\frac{l^2}{6g}\omega_m^2=3{,}61\cdot10^{-2}\ \mathrm{m};\qquad H=\frac{l^2+d^2}{6g}\omega_m^2=7,8\cdot10^{-3}\ \mathrm{m}.$$

b) Most vizsgáljuk a rugalmatlan ütközés esetét. Jelöljük ω_2 vel az ütközés utáni közös szögsebességet. Most csak a forgásmennyiség megmaradására vonatkozó egyenletet írhatjuk fel:

$$\omega_1\Theta_m=\omega_2(\Theta_m+\Theta_M),\qquad \omega_2=\frac{\omega_1\Theta_m}{\Theta_m+\Theta_M}=1{,}072\ 1/\mathrm{s}.$$

Az ütközés utáni pillanatban a mozgási energia $E = (1/2)(\Theta_m + \Theta_M)\omega_2^2 = 1{,}13 \cdot 10^{-2}$ J.

Most vizsgáljuk meg, hogy együtt mozog-e a két test az ütközés után.

Nézzük meg, mekkora lenne a testek szöggyorsulása φ szögű elfordulás után, ha külön-külön mozognának!

A pálcára ható forgatónyomaték: $mg(l/2)\sin\varphi$ (l. az ábrát). A szöggyorsulása:

$$\beta_m = \frac{mg(l/2)\sin\varphi}{\Theta_m} = \frac{3g\sin\varphi}{2l}.$$

A lemezre ható forgónyomaték $Mg\dfrac{\sqrt{l^2+d^2}}{2}\sin(\varphi + y)$, valamint $\sin y = \dfrac{d}{\sqrt{l^2+d^2}}$ és $\cos y = \dfrac{l}{\sqrt{l^2+d^2}}$.
Tehát a szöggyorsulás:

$$\beta_M = \frac{Mg(\sqrt{l^2+d^2}/2)\sin(\varphi+y)}{\Theta_M} = \frac{3g(l\sin\varphi + d\cos\varphi)}{2(l^2+d^2)}.$$

Osszuk el őket egymással, hogy összehasonlítsuk őket. Az egyszerűsítések után:

$$\frac{\beta_M}{\beta_m} = \frac{l^2 + dl\,\mathrm{ctg}\,\varphi}{l^2+d^2}.$$

Látható, hogy ez nagyobb egynél, ha $l\,\mathrm{ctg}\,\varphi > d$, azaz $\mathrm{ctg}\,\varphi > \mathrm{tg}\,y$. Tehát $\beta_M > \beta_m$, ha $\varphi < 90^\circ - y$, azaz $\varphi < 71^\circ 34'$. Ha a két test együtt indul az alsó helyzetből, akkor mindaddig egymáshoz nyomódnak, amíg a pálca előbb kiszámított lassulása kisebb a lemezénél, tehát $71^\circ 34'$ kitérésig együtt mozognak. A pálcát 60°-os szögből indítottuk, így nem lehetséges, hogy a két test az ütközés után ennél jobban kitérjen, tehát a rugalmatlan ütközés után a maximális kitérésig együtt fognak mozogni.

φ szögű kitérés esetén a pálca tömegközéppontjának emelkedése $h = (l/2)(1 - \cos\varphi)$. A lemezé pedig $H = h + (d/2)\sin\varphi$. A két egyenletből φ-t kiküszöbölve kapjuk:

$$H = h + d\sqrt{(h/l) - (h^2/l^2)}.$$

Az energiamegmaradás törvénye szerint $mgh + MgH = E$.
E két egyenletből álló egyenletrendszert megoldva h-ra egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$h^2[g^2(m+M)^2 + M^2g^2d^2l^{-2}] - h[2Eg(m+M) + M^2g^2d^2l^{-1}] + E^2 = 0.$$

Megoldva és adatainkat behelyettesítve kapjuk, hogy

$$h = 1{,}37 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m} \qquad \text{és} \qquad H = 2{,}28 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}.$$

Szállási Zoltán (Esztergom, Dobó K. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján.