I. megoldás. A pálya mentén kitett test és az űrhajó mozgása jó közelítéssel felfogható úgy, hogy mindketten azonos pályán mozognak, és erre a mozgásukra szuperponálódva a kölcsönös vonzás hatására egymás felé esnek. Célszerű a relatív mozgásukat a közös súlyponthoz rögzített koordináta-rendszerből vizsgálni. Ebben a koordináta-rendszerben a M tömegű űrhajó nyugvónak tekinthető, hiszen az űrhajó sebessége m/M-szer kisebb, mint a m tömegű kitett tárgyé. Feladatunk tehát az, hogy meghatározzuk, mennyi idő alatt esik rá az $R = 19$ m sugarú űrhajóra a falától $h = 3$ m távolságra levő tárgy. A tárgy gyorsulása az esés közben állandóan változik, célszerű ezért a becsapódás helyét a következő módon meghatározni. Az energiamegmaradás szerint a tárgy sebessége és a faltól való x távolság között az

$$\frac{1}{2}mv^2 = \gamma m M\left(\frac{1}{R+x} - \frac{1}{R+h}\right) \tag{1}$$

összefüggés áll fenn, azaz

$$v = \sqrt{2\gamma M\left(\frac{1}{R+x} - \frac{1}{R+h}\right)}. \tag{2}$$

Ezt a sebességet állandónak véve, amíg az x $(x - \Delta x)$-re csökken, azt találjuk, hogy a faltól x távolságra levő kicsiny Δx hosszúságú szakasz megtételéhez

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\left[2M\gamma\left(\frac{1}{R+x} - \frac{1}{R+h}\right)\right]^{1/2}} \tag{3}$$

idő szükséges.

Bontsuk fel a $(0,\, h)$ intervallumot az x_i osztópontok segítségével kicsiny, Δx_i hosszúságú részekre $(i = 1, 2, \ldots, n)$, így (3) alapján azt kapjuk, hogy a teljes h távolság befutásához szükséges idő közelítőleg

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta x_i}{\left[2M\gamma\left(\frac{1}{R+x_i} - \frac{1}{R+h}\right)\right]^{1/2}}.$$

A $(0,\, h)$ intervallum felosztását minden határon túl finomítva, a fenti összeg határértéke az

$$\int_0^h \frac{dx}{(2\gamma M)^{1/2}\left(\frac{1}{R+x} - \frac{1}{R+h}\right)^{1/2}} \tag{4}$$

integrál, ami pontosan megadja a h távolság megtételéhez szükséges t időt.

Bár az integrál kiszámítható, t nagyságának megbecsüléséhez elegendő, ha a

$$t \approx \frac{h}{v_{\text{átl}}} \tag{5}$$

kifejezést használjuk, ahol $v_{\text{átl}}$ átlagsebességének a kezdeti 0 és a végső

$$v = \sqrt{2\gamma M\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)} = 1{,}64 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

számtani közepét vesszük. Így

$$t \approx \frac{2h}{\sqrt{2M\gamma\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)}} = 10{,}2 \text{ óra} \tag{7}$$

adódik. (A pontos érték

$$t = (2\gamma M)^{-1/2}\left\{\left[hR(R+h)\right]^{1/2} + (R+h)^{3/2}\text{arc tg}\sqrt{h/R}\right\} = 10{,}7 \text{ óra}).$$

Ez alatt az idő alatt az űrhajó kereken 6000 km-t tesz meg.

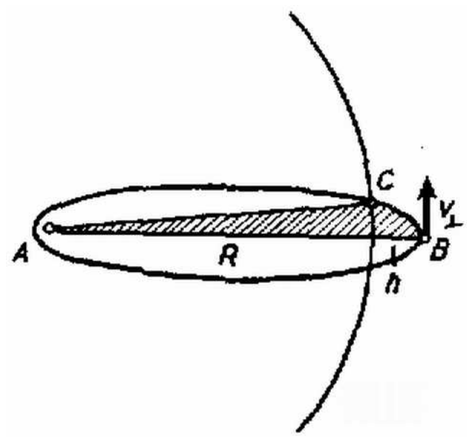
Amikor a „kitett tárgy” egy űrhajós, aki pisztolyából igen rövid idő alatt m_g tömegű v_g sebességű gázt lő ki, tömege m_g-vel csökken, de $m_g v_g$ nagyságú impulzusra, azaz

$$v = \frac{m_g v_g}{m - m_g} = 0{,}5\ \mathrm{m/s} \tag{8}$$

sebességre tesz szert. Ez a sebesség lényegesen nagyobb, mint az, amelyre a gravitáció gyorsítaná, tehát emellett a v mellett a vonzás miatt fellépő sebességnövekedés elhanyagolható. Ezzel a sebességgel a $h = 3$ m utat 6 s alatt teszi meg az űrhajós. Eközben az űrhajó 9,75 km-t tesz meg.

Fehér Péter (Budapest, Kaffka M. Gimn. III. o. t.)

II. megoldás. A kitett test becsapódásának az idejét meghatározhatjuk a Kepler-törvények segítségével is. Képzeljük el, hogy a kitett testet egy igen kicsiny, a két test középpontját összekötő egyenesre (AB) merőleges $v_\perp$ sebességgel indítjuk! Ekkor a pálya egy nagyon elnyújtott ellipszis lesz, amely a $v_\perp \to 0$ határesetben rázsugorodik az $\overline{AB}$ szakaszra (l. az 1. ábrát).



1. ábra

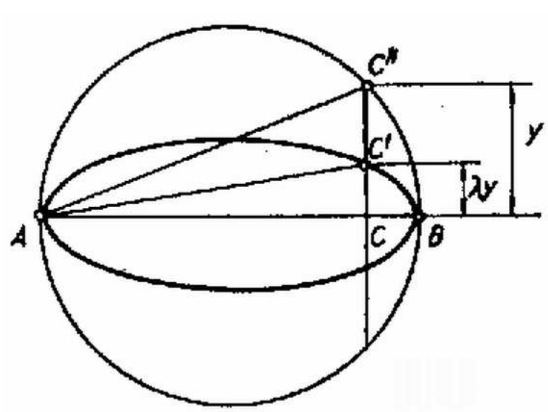
Kepler II. törvénye értelmében a $\overline{BC}$ szakasz befutásához szükséges idő (t) és a teljes keringési idő (T) aránya megegyezik a vezérsugár által súrolt felület (F_{ABC}) és az ellipszis teljes területének (F_{ell}) arányával:

$$\frac{t}{T} = \frac{F_{ABC}}{F_{\mathrm{ell}}}. \tag{9}$$

$v_\perp \to 0$ esetén (9) bal és jobb oldalának határértéke egyenlő. Ebben a határesetben t éppen az általunk meghatározni kívánt becsapódási idő, T pedig az $R+h$ nagytengelyű ellipszisen való keringési idő:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{R+h}{2}\right)^3}{\gamma M}}. \tag{10}$$

Kérdés azonban, mi a jobb oldal határértéke $v_\perp \to 0$ esetén. Ezt a határértéket az ellipszisek következő tulajdonsága alapján kaphatjuk meg: minden $2a$ nagytengelyű ellipszis előállítható úgy, hogy egy a sugarú kört az egyik átmérőjére merőlegesen megadott arányban zsugorítunk (2. ábra).



2. ábra

Ezen zsugorítás közben (mivel csak egy lineáris méretet változtatunk) a területek ugyanilyen arányban változnak:

(11) $$F_{\text{ell}} = \lambda F_{\text{kör}}$$

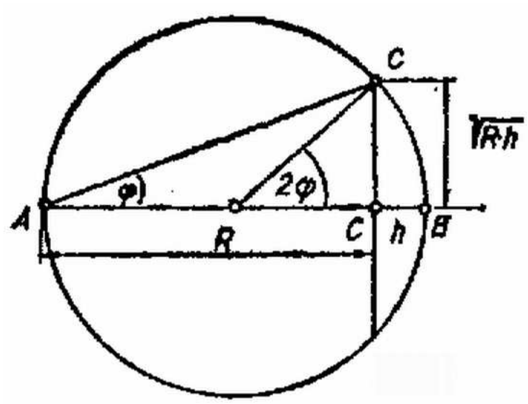
(12) $$F_{ABC'} = F_{ABC''}.$$

(11) és (12)-ből osztással kapjuk, hogy

(13) $$\frac{F_{ABC'}}{F_{\text{ell}}} = \frac{F_{ABC''}}{F_{\text{kör}}}$$

λ-tól függetlenül, tehát a $\lambda \to 0$ esetben is. Így

(14) $$\frac{t}{T} = \frac{F_{ABC''}}{F_{\text{kör}}}$$



3. ábra

(14) jobb oldalát a 3. ábra segítségével könnyen meghatározhatjuk:

(15) $$\varphi = \text{arc tg } \sqrt{h/R},$$

(16) $$F_{ABC''} = \frac{1}{2}\frac{R+h}{2}\sqrt{Rh} + \frac{2\varphi}{2\pi}\pi\left(\frac{R+h}{2}\right)^2,$$

(17) $$F_{\text{kör}} = \pi\left(\frac{R+h}{2}\right)^2,$$

és így

(18) $$t = \frac{\left[hR(R+h)\right]^{1/2} + (R+h)^{3/2}\text{arc tg } \sqrt{h/R}}{(2\gamma M)^{1/2}}$$

Kuna János (Törökszentmiklós, Bercsényi M. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Megoldásunk során úgy vettük, hogy az űrhajó a közös súlyponthoz rögzített koordináta-rendszerben áll. Ha figyelembe vesszük, hogy a tömegvonzás őt is gyorsítja, képleteinkben mindenütt M helyébe $M+m$ kerül.

2. Feladatunk megoldásakor lényegesen kihasználtuk, hogy a tárgyat az űrhajó pályája mentén (elé vagy mögé) rakták ki. Ebben és csakis ebben az esetben fogadható el az a közelítés, hogy az űrhajót és a testet pályán tartó Föld hatását nem vesszük figyelembe. Ennek szemléltetésére vizsgáljuk meg, mi történik, ha a testet pl. az űrhajó és a Föld közé tesszük ki! A feladatban megadott sebesség $r = \dfrac{\gamma M_{\text{föld}}}{v^2} = 1{,}57 \cdot 10^8$ m sugarú körpályának felel meg. Tegyük fel, hogy a tárgyat úgy helyezzük ki az $r-d$ ($d = 22$ m) sugarú pályára, hogy a sebessége az új pályasugárnak megfelelő $v' \cong v + dv^3/(\gamma M_{\text{föld}})$ legyen. Ha az űrhajó és a kitelt test nem vonzanák egymást, a két test koncentrikus pályán haladna, de a kitett test a saját pályáján $dv^3/(\gamma M_{\text{föld}}) \cong 2{,}4 \cdot 10^{-4}$ m/s sebességgel gyorsabban futna. Erre a mozgásra szuperponálódik a kölcsönös vonzás hatása. Mivel az ebből eredő sebesség azonos nagyságrendű a két test

sebességkülönbségével, azt látjuk, hogy a test – miközben közeledik az űrhajóhoz – egy kicsit (nem elhanyagolható mértékben!) előre is szalad, és az űrhajó felületét nem három méter befutása után éri el.

Más típusú probléma merül fel, ha azt feltételezzük, hogy a kitett test és az űrhajó sebessége az indításkor teljesen azonos. A kisebb sugáron a körpályán maradáshoz szükséges sebesség nagyobb ($v' > v$), mint amivel a test rendelkezik, így az űrhajó vonzása nélkül a kitett test közeledne a Földhöz, azaz távolodna az űrhajótól. Megvizsgálva a fellépő gyorsulások nagyságrendjét $\Big[$az űrhajó Föld felé mutató (centripetális) gyorsulásánál a kis test gyorsulása $\dfrac{2\gamma Md}{r^3} = 4\cdot 6\cdot 10^{-9}\ \mathrm{m/s^2}$ értékkel nagyobb$\Big]$, azt találjuk, hogy még az űrhajó vonzása sem elegendő ahhoz, hogy az űrhajó és a kitett test távolodását megakadályozza.

A 2. megjegyzés jól mutatja, hogy milyen gondosan kell eljárnunk, amikor több test egymás gravitációs terében való mozgását vizsgáljuk. Ezért találtuk érdemesnek a probléma részletes tárgyalását közölni, ezt egy külön cikkben találja meg az érdeklődő olvasó (l. a 225. oldalt).