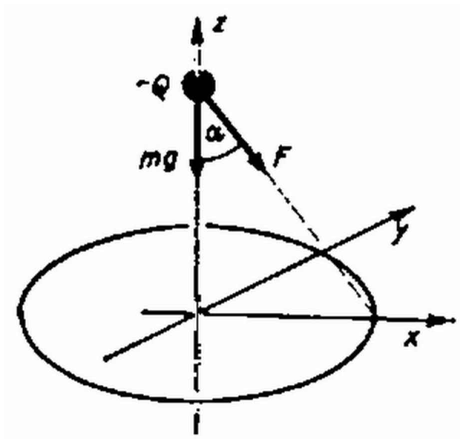
A $-Q$ töltésre a nehézségi erő és a gyűrű elektrosztatikus tere hat. Vegyük fel úgy a koordináta-rendszert, hogy a gyűrű az $x-y$ síkban legyen, tengelye pedig a z tengely.



Számítsuk ki az elektrosztatikus erőt. Ehhez gondolatban vágjuk Δl nagyságú darabokra a körgyűrűt. Minden darabon – egyenletes töltéseloszlást feltételezve – $\Delta l Q/2R\pi$ töltés lesz (R a gyűrű sugara). Először két szemben levő gyűrűdarab által kifejtett erő összegét határozzuk meg. A vonzóerő nagysága a gyűrű bármely pontjára ugyanakkora, tehát a vízszintes komponensek kiejtik egymást, a függőlegesek összeadódnak, és így a vonzóerő (az erőt fölfelé tekintjük pozitívnak):

$$-2\frac{kQ^2\Delta l}{2R\pi}\cdot\frac{1}{R^2+z^2}\cos\alpha,$$

ahol $k = 9\cdot 10^9\ Nm^2/C^2$, $\cos\alpha = z/(R^2+z^2)^{1/2}$. Mivel $\frac{2R\pi}{\Delta l}\cdot\frac{1}{2}$ darab ilyen pár van, a z pontban levő töltésre ható teljes vonzóerő

(1) $$F_r = -2k\frac{Q^2\Delta l}{2\pi R}\cdot\frac{1}{R^2+z^2}\cdot\frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\cdot\frac{2R\pi}{\Delta l}\cdot\frac{1}{2} = -k\frac{Q^2 z}{(R^2+z^2)^{3/2}};$$

Az m tömegű, $-Q$ töltésű testünk mozgásegyenlete tehát

(2) $$ma = -mg + F_1.$$

Az egyenlet megoldása tetszőleges z esetén igen nehéz. Ha viszont $z \ll R$, akkor a (2) egyenlet

(3) $$ma = -mg - k\frac{Q^2 z}{R^3}$$

alakúra egyszerűsödik. Mint azt már több megoldásban megmutattuk, a (3) egyenlet a harmonikus rezgőmozgás alapegyenletére vezethető vissza, ha bevezetjük z_0-t, a következőképpen

$$mg = -k\frac{Q^2 z_0}{R^3}.$$

Beírva z_0 értéket (3)-ba, az

$$ma = -k\frac{Q^2(z-z_0)}{R^3}$$

egyenletet kapjuk. Az m tömegű test tehát a z_0 pont körül harmonikus rezgőmozgást végez

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mR^3}{kQ^2}}$$

rezgésidővel ha a $z \ll R$ feltétel teljesül.

Meg kell tehát vizsgálnunk, hogy a (2) egyenlet mikor helyettesíthető a (3) egyenlettel. Jogos feltenni, hogy a (3) helyesen írja le a mozgást, ha pl.

(4) $$\left[\frac{kQ^2 z}{(R^2+z^2)^{3/2}} - \frac{kQ^2 z}{R^3}\right] : \frac{kQ^2 z}{R^3} < 0{,}001.$$

Numerikusan könnyű megmutatni, hogy (4) akkor teljesül, ha $z| < 0,02R$. Tehát a kezdő pillanatban $z \le 0{,}02R$ a rezgőmozgás feltétele. Mivel a test z_0 körül végzi rezgéseit, így z_0-ra is kell, hogy teljesüljön (4), azaz

$$\frac{mgR^2}{kQ^2} = |z_0| \le 0{,}02R.$$

Ez viszont feltételt ad a töltés és tömeg viszonyára is:

$$\frac{m}{Q^2} \leq \frac{0{,}02k}{gR^2}.$$

Tegyük fel, hogy a (4) feltétel nem teljesül. Ekkor két esetet különböztetünk meg: a súlyerő az F_2 Coulomb erő maximális értékénél *a)* kisebb, *b)* nagyobb. Az (1) függvény deriváltját kiszámítva könnyen adódik, hogy a függvénynek a $z = -R/\sqrt{2}$ helyen van maximuma, ott a függvény értéke

$$\frac{Q^2 k}{R^2} \cdot 0{,}38;$$

Tehát, ha a $0{,}38\ Q^2 k/R^2 \geq mg$ egyenlőtlenség teljesül, akkor a test még nem esik le, ha nem térítjük ki túlságosan, és rezgőmozgást végez. Ha $m > 0{,}38\ kQ^2/(gR^2)$, akkor a test leesik.

Kaptás Dénes (Nagykőrös, Arany J. Gimn., IV. o. t.) és
Horváth Gábor (Kiskunhalas, Szilády Á. Gimn., IV. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. Több megoldó csak azt mutatta meg, hogy a (2) egyenlet a (3)-ra egyszerűsödik $z \ll R$ esetében; az ilyen megoldások nem teljes értékűek. Azt kellett volna megmutatni, hogy a feladatban szereplő paraméterek milyen értékénél valósulhat meg a $z \ll R$ feltétel.