



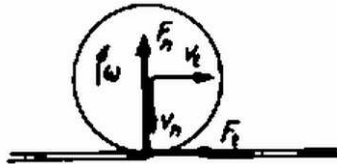
Először általánosan vizsgáljuk meg, hogy hogyan történik egy forgó golyó ütközése, majd a levezetett összefüggések birtokában tárgyaljuk a feladatban szereplő jelenséget. A rövidség kedvéért már itt feltételezzük, hogy

- a) az ütközésnél a felületre merőleges sebességösszetevő a felére csökken,
- b) ütközés előtt $\omega r > v_t$, tehát az ütközés közben fellépő súrlódási erő a golyó forgását lassítja, érintő irányú sebességét növeli.

Az ütközés előtti állapotot az 1. ábrán mutatjuk be. Két eset lehetséges:

1. A golyó az ütközés teljes ideje alatt köszörül.

Ekkor az ütközés egész ideje alatt hat a csúszási súrlódási erő, $F_t = \mu F_n$. Feltéve, hogy az ütközés Δt ideig tart, a változó F_t , és F_n erőt idő szerinti átlagával helyettesítve a következő összefüggéseket írhatjuk föl (az ütközés utáni adatokat ' -vel jelöltük):



1. ábra

$$\begin{aligned} (1) \quad & \bar{F}_n \Delta t = m(v'_n - v_n) = (3/2)mv_n, \\ (2) \quad & \bar{F}_t \Delta t = \mu \bar{F}_n \Delta t = m(v'_t - v_t), \\ (3) \quad & \bar{F}_t \Delta t \cdot r = (2/5)mr^2(\omega - \omega'). \end{aligned}$$

(Itt \bar{F} idő szerinti átlagolást jelöl. Vegyük észre, hogy erő csak impulzusátadásban szerepel, így mindenhol idő szerint kell átlagolni. Ha valahol munkát kellene számítanunk, ott hely szerinti átlagra lenne szükségünk, ami ettől különböző érték.) A három egyenletből az ütközés utáni sebességek kifejezhetők:

$$\begin{aligned} (4) \quad & v'_n = -v_n/2, \\ (5) \quad & v'_t = v_t + (3/2)\mu v_n, \\ (6) \quad & \omega' = \omega - (15/4)\mu(v_n/r). \end{aligned}$$

Ez az eset akkor áll fenn, ha a golyó végig köszörül, és így az ütközés végén is $\omega' r > v'_t$. (5) és (6) behelyettesítésével a

$$(7) \quad \mu \leq \frac{r\omega - v_t}{(21/4)v_n}$$

feltétel adódik. Ha a (7) egyenlőtlenség nem teljesül:

2. A köszörülés az ütközés vége előtt, $\Delta\tau$ idő alatt befejeződik:

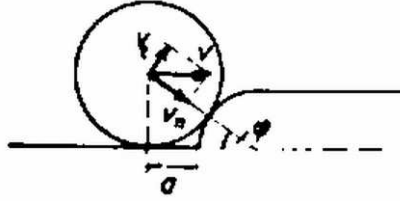
Jelöljük *-gal a $\Delta\tau$ időtartamra vett átlagot. A következő összefüggések állnak fenn az impulzus és impulzusmomentum átadásra és a köszörülés megszűnésére:

$$\begin{aligned} (8) \quad & F_t^* \Delta\tau = m(v'_t - v_t), \\ (9) \quad & F_t^* \Delta\tau \cdot r = (2/5)mr^2(\omega - \omega'), \\ (10) \quad & \omega' r = v'_t, \end{aligned}$$

Az ütközés utáni sebességek

$$\begin{aligned} (11) \quad & v'_n = -v_n/2, \\ (12) \quad & v'_t = (2/7)r\omega + (5/7)v_t, \\ (13) \quad & \omega' = (5/7)v_t/r + (2/7)\omega. \end{aligned}$$

a) Térjünk most rá a feladat konkrét helyzetének elemzésére! A 2. ábrán azt a pillanatot ábrázoltuk, amikor a golyó az akadálnak ütközik.



2. ábra

$\sin \varphi = 5/7,5$, így $\varphi = 41,8^\circ$. Az ütközési pontba húzott érintővel párhuzamos és rá merőleges sebesség komponensek:

$$v_t = v \sin \varphi = 1,33 \text{ m/s},$$

$$v_n = v \cos \varphi = 1,49 \text{ m/s},$$

a szögsebesség

$$\omega = v/R = 40 \text{ s}^{-1}.$$

(7) alapján ahhoz, hogy a golyó az ütközés egész ideje alatt csússzon, a

$$\mu \leq \frac{(0,05 \cdot 40 - 1,33) \cdot 4}{41 \cdot 1,49} = 0,0852$$

összefüggésnek kell teljesülnie. Mivel ez nem áll fenn, az ütközés utáni sebességek a (11)–(12) összefüggésekből számíthatók:

$$v'_n = -0,75 \text{ m/s}; \quad v'_t = 1,52 \text{ m/s}; \quad \omega' = 30,5 \text{ 1/s}.$$

b) Az ütközést ferde hajítás követi, amelynek vízszintes és függőleges kezdősebessége

$$v_x = v'_t \sin \varphi - |v'_n| \cos \varphi = 0,46 \text{ m/s},$$

$$v_y = v'_t \cos \varphi + |v'_n| \sin \varphi = 1,63 \text{ m/s}.$$

A golyó középpontja a hajítás során $y' = 0,025 \text{ m}$ -rel kerül feljebb, így a hajítás t_1 ideje a

$$v_y t_1 - (g/2)t_1^2 = y'$$

egyenlet nagyobbik gyökeként adódik. A számadatokat behelyettesítve $t_1 = 0,32 \text{ s}$ adódik. Az ütközés pillanatában a golyó középpontja vízszintesen $a = (R + r) \cos \varphi - r = 0,031 \text{ m}$ távolságra van az akadály alsó élétől. A hajítás után a golyó távolsága az akadály élétől így

$$x_1 = v_x t_1 - a = 0,115 \text{ m}.$$

Az akadály tetejét

$$v_x^{(1)} = v_x = 0,46 \text{ m/s},$$

ill.

$$v_y^{(1)} = v_y - g t_1 = -1,48 \text{ m/s}$$

sebességgel éri el a golyó.

c) Az akadály tetejére érve az ütközésre fennáll a (7) feltétel

$$\mu \leq \frac{(0,05 \cdot 30,5 - 0,46) \cdot 4}{21 \cdot 1,48} = 0,137,$$

így a golyó az ütközés egész ideje alatt csúszik. a (4)–(6) összefüggések határozzák meg az ütközés utáni sebességeket.

$$v_y^{(2)} = -0,74 \text{ m/s}, \quad v_x^{(2)} = 0,68 \text{ m/s}, \quad \omega^{(2)} = 19,4 \text{ s}^{-1}.$$

Ezekkel a kezdősebességekkel ferde hajítás történik, amelynek időtartama

$$t_2 = 2v_y^{(2)}/g = 0,15 \text{ s},$$

a vízszintesen megtett út

$$x_2 = v_x^{(2)} t_2 = 0,10 \text{ m}.$$

d) Ezután újabb ütközés történik az akadály vízszintes lapján. (7) nem teljesül:

$$\mu > \frac{(0,05 \cdot 19,4 - 0,74) \cdot 4}{21 \cdot 0,68} = 0,065,$$

így a csúszás az ütközés közben áll le. Az ütközés utáni sebességek (11)–(13)-ból

$$v_y^{(3)} = -0,37 \text{ m/s}, \quad v_x^{(3)} = 0,76 \text{ m/s}, \quad \omega^{(3)} = 15,3 \text{ s}^{-1}.$$

e) A mozgás további szakaszán $v_x = Ra$, így a golyó nem csúszik meg az ütközések során, forgása nem játszik szerepet. A golyó pattog, az első pattanás ideje $t_3 = 2v_y^{(3)}/g$. Mivel a függőleges sebesség minden ütközéskor a felére csökken, a pattogás megszűnéséig

$$T' = \sum_{i=3}^{\infty} t_i = \frac{2v_y^{(3)}}{g} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j = 2t_3 = 0,15 \text{ s}$$

idő telik el. Ezalatt a golyó vízszintesen

$$x' = v_x^{(3)}T' = 0,115 \text{ m}$$

utat tesz meg.

A pattogás közben v_x nem változik, így a pattogás megszűnése után a golyó

$$v_x^{(3)} = 0,76 \text{ m/s}$$

sebességgel gördül. Ez az első ütközés pillanatától számítva

$$T = t_1 + t_2 + T' = 0,62 \text{ s}$$

idő múlva, az akadály alsó élétől

$$-X = x_1 + x_2 + X' = 0,33 \text{ m}$$

távolságra következik be.

Kaptás Dénes (Nagykőrös, Arany J. Gimn., IV. o. t.)
dolgozata alapján