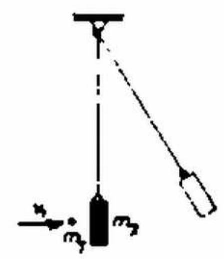

a) A mennyezetről lelógó test impulzusa kezdetben nulla, és egy golyó belövése $m_1 v_1$-gyel növeli a rendszer impulzusát. Így n golyócska belelövése után az impulzus $n(m_1 v_1)$ lesz. A test sebességét jelöljük ekkor u_n,-nel. Felírhatjuk az impulzusmegmaradást:

$$u_n = \frac{n(m_1 v_1)}{m_2 + n m_1} = \frac{m_1 v_1}{(m_2/n) + m_1}$$

Láthatjuk, hogy ez a függvény szigorúan monoton növekedő, így a maximális sebességet $n \to \infty$ esetben kapjuk meg: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = v_1 = 15$ m/s. Az inga lengésére írjuk fel a mechanikai energia megmaradását (az n-edik golyócska belövése után)

$$(1/2)\,(m_2 + n m_1) u_n^2 = (m_2 + n m_1) g h,$$

ahol h az inga legnagyobb magassága;

$$h = u_n^2/2g, \quad \text{tehát} \quad h_{max} = v_1^2/2g = 11{,}25 \text{ m}.$$

Tebát az inga legfeljebb 11,25 m magasra emelkedhet.

b) Az n-edik golyó belövése után a rendszerrel összesen $E_1 = n m_1 v_1^2/2$ energiát közöltünk. Az ütközés utáni pillanatban helyzeti energiája még nincs, így összes mechanikai energiája a mozgási energia:

$$E_2 = \frac{(m_2 + n m_1) u_n^2}{2}.$$

A két energia különbsége fordítódott arra, hogy a rendszer hőmérsékletét emelje. Az ismert összefüggés alapján a hőmérsékletemelkedés:

$$\varDelta T_n = \frac{Q}{c(m_2 + n m_1)} = \frac{E_1 - E_2}{c(m_2 + n m_1)}.$$

Egyszerűsítések után:

$$\varDelta T_n = \frac{n m_1 m_2 v_1^2}{2c(m_2 + n m_1)^2} = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2c} \cdot \frac{1}{\dfrac{(m_2 + n m_1)^2}{n}}.$$

A $\varDelta T$ ott maximális, ahol a

$$\frac{(m_2 + n m_1)^2}{n} = \frac{m_2^2}{n} + 2 m_1 m_2 + n m_1^2$$

kifejezésnek minimuma van. A számtani és mértani középre vonatkozó összefüggést felhasználva írhatjuk, hogy

$$\frac{m_2^2}{n} + n m_1^2 \ge 2 m_1 m_2.$$

A bal oldatnak tehát n függvényében minimuma akkor van, ha az egyenlőség teljesül, azaz

$$\frac{m_2^2}{n} = n m_1^2.$$

amiből

$$n = \frac{m_2}{m_1} = 24.$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\varDelta T_{max} = \varDelta T_{24} = 0{,}035 \text{ K}.$$

Halász Péter (Miskolc, Földes F. Gimn., IV. o. t.)