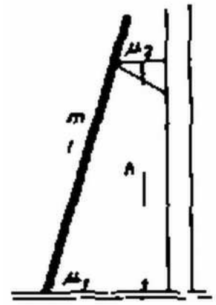
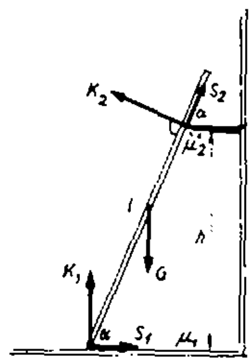


Jelöljük a rúdra ható erőket az 1. ábrának megfelelően.



1. ábra

Az egyensúly feltétele, hogy ezen erők eredője, valamint forgatónyomatékaik összege zérus legyen. Az utóbbit a rúd talppontjára felírva, ezekből a feltételekből a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$K_1 - K_2 \cos\alpha + S_2 \sin\alpha - G = 0, \tag{1}$$

$$S_1 + S_2 \cos\alpha - K_2 \sin\alpha = 0, \tag{2}$$

$$G(l/2)\cos\alpha - K_2 h/\sin\alpha = 0. \tag{3}$$

Az S_1 és S_2 súrlódási erőkre nyilván teljesül, hogy

$$|S_1| \le \mu_1 K_1, \quad |S_2| \le \mu_2 K_2. \tag{4}$$

továbbá az elrendezésből következik az

$$1 \ge \sin\alpha \ge h/l \tag{5}$$

egyenlőtlenség. ($\sin\alpha = 1$ esetén a rúd labilis egyensúlyi helyzetben, függőlegesen áll.)

Az (1)–(3) egyensúlyi egyenletek csak a K_2 kényszererőt határozzák meg egyértelműen, S_1, S_2 és K_1 nagysága attól függ, hogyan helyeztük oda a rudat (be van-e „feszítve” vagy kicsit „húzva”). Azokat az α szögeket, amelyeknél egyensúly lehetséges, a következőképpen kaphatjuk meg.

Fejezzük ki az (1)–(3) egyenletekből S_1,-et, ill. S_2-t K_1 függvényeként:

$$S_1 = \frac{1}{\sin\alpha}\left[G\left(\frac{l}{2h}\sin\alpha\cdot\cos\alpha\right) - \cos\alpha + K_1\cos\alpha\right], \tag{6}$$

$$S_2 = \frac{1}{\sin\alpha}\left[G\left(1 - \frac{l}{2h}\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha\right) - K_1\right], \tag{7}$$

Ha van olyan $K_1 > 0$, hogy $S_1(K_1)$ és $S_2(K_1)$ kielégítik a (4) feltételeket, akkor az adott α szög mellett megvalósítható az egyensúly. (3), (4), (6), és (7), alapján kapjuk, hogy

$$K_1(\mu + \mathrm{ctg}\,\alpha) \ge G\left[\mathrm{ctg}\,\alpha - \left(\frac{l}{2h}\right)\cos\alpha\right] \ge K_1(\mathrm{ctg}\,\alpha - \mu_1) \tag{8}$$

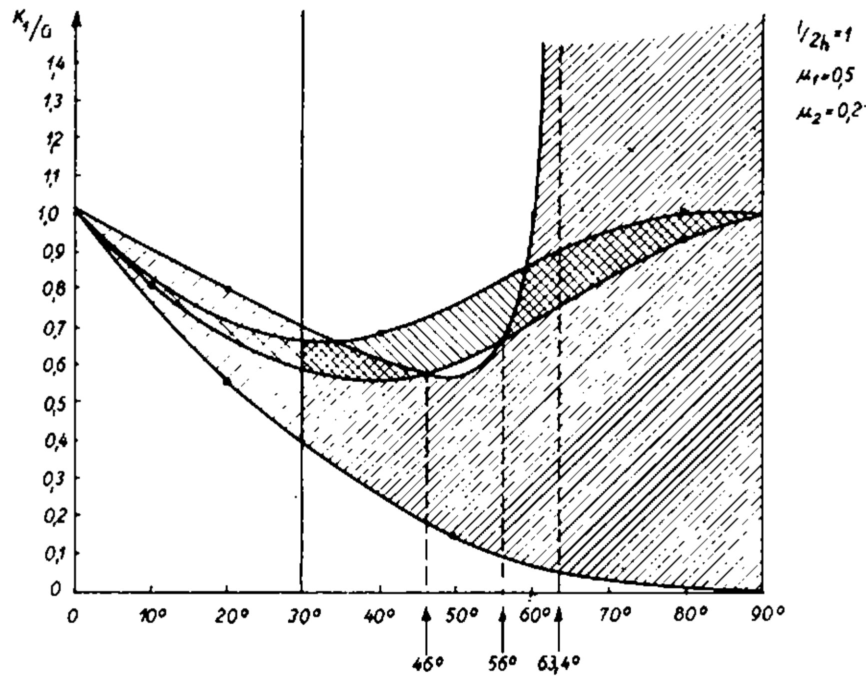
és

$$G\left[1 + \frac{l}{2h}\sin\alpha\cdot\cos\alpha(\mu_2\sin\alpha - \cos\alpha)\right] \ge K_1 \ge$$

$$\ge G\left[1 - \frac{l}{2h}\sin\alpha\cdot\cos\alpha(\mu_2\sin\alpha + \cos\alpha)\right] \tag{9}$$

A (8) és (9) egyenlőtlenségek jelölik ki – a $K_1 > 0$ és (5) feltétel figyelembevételével a lehetséges α szögeket és K_1 szóba jöhető értékeit.

A (8), (9) egyenlőtlenségek algebrai megoldása meglehetősen bonyolult. Adott $l/2h$, μ_1 és μ_2 értékek mellett azonban grafikus megoldásuk nem jelent nehézséget. A megoldás menete a következő: egy rajzon ábrázoljuk a (8) ill. (9) egyenlőtlenségeket kielégítő (K_1, α) számpárokat $K_1 > 0$ esetén. A kettő közös részének az a része, amelyben $\alpha \geq \text{arc} \sin(h/l)$ tartalmazza azokat az α szögeket és a hozzájuk tartozó lehetséges K_1 értékeket, amelyeknél egyensúly lehet.



2. ábra

A 2. ábra a (8), (9) egyenlőtlenségek megoldását mutatja $l/(2h) = 1$, $\mu_1 = 0{,}5$, $\mu_2 = 0{,}2$ paraméterértékek esetén. A jobbra dőlő vonalkázott tartomány mutatja a (8) egyenlőtlenségeket kielégítő (K_1, α) párokat, határoló görbéi a

$$K_1/G = \frac{\operatorname{ctg}\alpha - \left[l/(2h)\right] \cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \mu_1} \tag{10a}$$

$$K_1/G = \frac{\operatorname{ctg}\alpha - \left[l/(2h)\right] \cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha + \mu_1} \tag{10b}$$

egyenletű görbék. A balra dőlő vonalkázású tartomány pontjai a (9) egyenlőtlenségeket elégítik ki, ezt a tartományt a

$$K_1/G = 1 + \left[l/(2h)\right] \sin\alpha \cos\alpha(\mu_2 \sin\alpha - \cos\alpha), \tag{11a}$$

$$K_1/G = 1 - \left[l/(2h)\right] \sin\alpha \cos\alpha(\mu_2 \sin\alpha + \cos\alpha), \tag{11b}$$

egyenletű görbék határolják. A két tartomány közös része mindkét irányban vonalkázott. Azok a részek, amelyekben $\alpha > \text{arc} \sin(h/l)$, kétszeres sűrűséggel vonalkázottak. Az ábráról leolvasható, hogy esetünkben két olyan tartomány van a (K_1, α) síkon, amelynek pontjai kielégítik a (8), (9) valamint az (5) egyenlőtlenségeket. Ennek megfelelően két szögtartomány van, amelyben lehet egyensúly, a 30° és 46° közötti, illetve az 56° és 90° közötti szögek tartománya.

Oszlányi Gábor (Miskolc, Földes F. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján