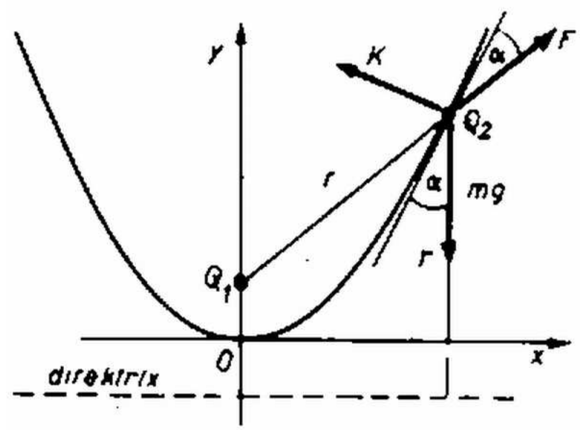
I. megoldás. Helyezzük a parabolát egy koordináta–rendszerbe úgy, hogy az y tengely legyen a parabola tengelye és az x tengely érintse. Ekkor a parabola egyenlete: $y = (1/4 \text{ cm}) \cdot x^2$.

A golyócskára három erő hat: a nehézségi erő, a Coulomb–erő és a parabola érintőjére merőleges kényszererő.

Geometriából ismeretes, hogy a parabola egy pontjába húzott vezérsugár és ugyanezen ponton átmenő, a tengellyel párhuzamos egyenes azonos szöget zár be a görbe érintőjével, tehát az ábrán α-val jelölt szögek azonosak.



Az egyensúly feltétele, hogy a nehézségi erő és a Coulomb–erő eredője merőleges legyen a parabola érintőjére, tehát

$$mg \cos\alpha = F \cos\alpha$$

legyen. Ez az egyenlőség akkor áll fenn, ha $mg = F$, vagy ha $\alpha = 90°$. Az utóbbi eset akkor lehetséges, ha a golyó a (0; 0) koordinátájú pontban van. Most foglalkozzunk az előbbi esettel. A Coulomb törvény segítségével r kiszámítható:

$$mg = \frac{kQ_1Q_2}{r^2},$$

azaz

$$r = \sqrt{\frac{kQ_1Q_2}{mg}}.$$

Felhasználva, hogy $y + 1 \text{ cm} = r$ és hogy $y = (1/4 \text{ cm}) \cdot x^2$, a golyó koordinátáit is megkapjuk:

$$y = \sqrt{\frac{kQ_1Q_2}{mg}} - 1 \text{ cm}; \qquad x = \pm\sqrt{4 \text{ cm}\sqrt{\frac{kQ_1Q_2}{mg}} - 4 \text{ cm}^2}.$$

Számadatainkkal: $r = 5$ cm, $x = \pm 4$ cm, $y \pm 4$ cm.

A (4; 4) és a (−4; 4) pontokban a golyó stabil egyensúlyi helyzetben van, hiszen ha feljebb, ill. lejjebb csúszik, akkor az F erő csökken, ill. nő, míg a nehézségi erő állandó marad, így az eredő erő lefelé, ill. felfelé fogja mozgatni.

A golyó a (0; 0) pontban labilis egyensúlyi állapotban van, hiszen itt $F > mg$, ezért innen kimozdítva az eredő erő a parabola szárain felfelé fogja mozgatni.

Vizsgáljuk meg, mi a helyzet tetszőleges töltések esetén. Ha ezek azonos előjelűek, akkor ugyanaz a helyzet, mint eddig, de most $r < 1$ cm nem lehetséges, ezért a két oldalsó egyensúlyi állapot csak

$$\frac{kQ_1Q_2}{mg} > 1 \text{ cm}$$

esetén valósul meg, és ha $\dfrac{kQ_1Q_2}{mg} \leq 1$ cm, akkor a (0; 0) pontban lesz csak egyensúlyi helyzet, viszont ez stabilis.

Ha különböző előjelűek a töltések, akkor nyilván csak a (0; 0) pontban van egyensúlyban a golyó, hiszen akkor van legmélyebben és a Q_1 töltéshez legközelebb.

Mivel a feladat szövegéből nem derül ki, hogy a parabola szárai felfelé vagy lefelé állnak, vizsgáljuk meg, mi a helyzet az utóbbi esetben. Ha a töltések azonos előjelűek, akkor ugyanaz a helyzet, mint korábban a különböző előjelű töltések esetén, de a (0; 0) hely labilis egyensúlyi állapot. Ha pedig a töltések különböző előjelűek, akkor hasonló lesz a helyzet, mint a megoldás első részében, azzal a különbséggel, hogy $-\dfrac{kQ_1Q_2}{mg} > 1$ esetén valósul meg a két oldalsó egyensúlyi állapot, amely most labilis lesz, és az origóban lesz a golyó stabil egyensúlyban, valamint $-\dfrac{kQ_1Q_2}{mg} \leq 1$ esetén csak az origóban lesz egyensúlyban, és ez az állapot labilis lesz.

Horváth Gábor (Kiskunhalas, Szilády Á. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Vizsgáljuk meg a rendszer energiaviszonyait! A helyzeti energia 0-szintjét a direktrixhez rögzítsük. Ekkor az elektromosan töltött golyócska helyzeti energiája csak r-től függ, és két részből tevődik össze:

$$E(r) = mgr + \frac{kQ_1Q_2}{r}, \quad \text{ahol} \quad r \geq 1 \text{ cm}.$$

A golyócska ott lesz egyensúlyban, ahol helyzeti energiájának (legalább lokális) szélsőértéke van.

r szerint deriválva kapjuk:

$$E'(r) = mg - \frac{kQ_1Q_2}{r^2}.$$

$E(r)$-nek ott lehet szélsőértéke, ahol $E'(r) = 0$ vagy az értelmezési tartomány végpontjában lehet szélsőérték. Az előbbi feltétel így írható:

$$0 = mg - \frac{kQ_1Q_2}{r^2},$$

innen r-et kifejezve

$$r = \sqrt{\frac{kQ_1Q_2}{mg}}.$$

Erről könnyen meg lehet mutatni, hogy az adott számadatok esetén minimumhely. Az értelmezési tartomány végpontjában, $r = 1$ cm-nél pedig lokális maximum van.

Tehát $r = 1$ cm vagy $r = \sqrt{\dfrac{kQ_1Q_2}{mg}}$ esetén lesz a golyó egyensúlyban. A megoldás innen ugyanúgy folytatható, mint az I. megoldás esetében.

Mocsáry Géza (Pannonhalma, Bencés Gimn., IV. o. t.)
dolgozata alapján