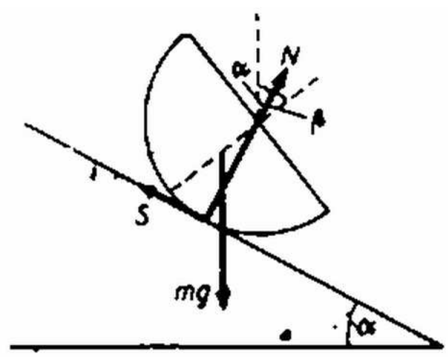

A félgömb nem csúszik meg a lejtőn, ha a rá ható erők eredője nulla. A lejtő nyomóereje *(N)* és a súrlódási erő *(S)* az ábra alapján:

$$S = mg \sin \alpha, \tag{1}$$
$$N = mg \cos \alpha. \tag{2}$$

A tapadás $S \le \mu N$ feltételébe beírva a szokásos

$$\mu \ge \operatorname{tg} \alpha \tag{3}$$

feltétel adódik.

Vizsgáljuk meg most azt az esetet, amikor $\mu \le \operatorname{tg}\alpha$ és a félgömb tisztán csúszik! Ekkora félgömb a lejtővel párhuzamos gyorsulással mozog, szimmetriatengelyének a lejtőre bocsátott merőlegessel bezárt β szöge állandó. Írjuk fel Newton II. törvényét a lejtővel párhuzamos és az arra merőleges összetevőkre:

$$mg \sin \alpha - S = ma, \tag{4}$$
$$mg \cos \alpha - N = 0, \tag{5}$$

ahol a csúszás miatt

$$S = \mu N. \tag{6}$$

A félgömb nem forog, tehát a rá ható forgatónyomatékok eredője nulla. Vigyáznunk kell azonban, hogy melyik pontra írjuk fel a nyomatéki egyenletet! Mivel a félgömb nincs nyugalomban, nem igaz az a sztatikában érvényes állítás, hogy a vonatkoztatási pont tetszőleges. A dinamika törvényei szerint kell eljárnunk, tehát a mozgást a tömegközéppont haladó mozgására és a tömegközéppont körüli forgásra kell bontanunk. A nyomatéki egyenlet tehát

$$Nd \sin \beta = S(R - d \cos \beta), \tag{7}$$

ahol $d = (3/8)R$ a tömegközéppontnak a gömb középpontjától mért távolsága. A (4)–(7) egyenletrendszer másodfokú egyenletre vezet, melynek megoldása:

$$\cos \beta = \frac{8\mu^2 \pm \sqrt{9 - 55\mu^2}}{3(1+\mu^2)}. \tag{8}$$

A diszkrimináns nem lehet negatív, innen $\mu \le 3/\sqrt{55}$. Ha ez a feltétel nem teljesül, a félgömb sík lapjára fordul. Könnyen belátható, hogy μ megfelelő értékeinél $|\cos \beta| \le 1$ adódik.

Ha a félgömböt egy súlytalan másik félgömbbel teljes gömbbé egészíthetjük ki, amelynek súlypontja középpontjától d távolságra van, β mindkét értékének fizikai értelem tulajdonítható: a pozitív előjelhez tartozó megoldás stabil, a negatív instabil helyzetnek felel meg. Félgömb esetében $\beta \le 90^\circ$, különben a félgömb sík lapjára billen. $\cos \beta$ akkor lesz a negatív előjelet véve is pozitív, ha $8\mu^2 \ge \sqrt{9 - 55\mu^2}$, ahonnan $\mu \ge 3/8$.

Összefoglalva, ha $\mu \le \operatorname{tg}\alpha$ és így a félgömb csúszik, szimmetriatengelyének a függőlegessel bezárt szöge

$$\alpha + \beta = \alpha + \operatorname{arc\,cos} \frac{8\mu^2 \pm \sqrt{9 - 55\mu^2}}{3(1+\mu^2)} \tag{9}$$

Ha $0 < \mu \le 3/8$, csak a pozitív előjelet véve kapunk megoldást, ez stabil egyensúlyi helyzetnek felel meg. $3/8 < \mu < 3/\sqrt{55}$ esetén a negatív előjelnek megfelelő instabil egyensúlyi helyzet is megjelenik. μ növelésével a két gyök közeledik egymáshoz, $\mu = 3/\sqrt{55}$ esetén egyenlővé válik. Ennél nagyobb súrlódási együtthatók (és $\operatorname{tg}\alpha \ge \mu$ miatt nagyobb hajlásszögű lejtők) esetén a félgömb mindenképpen sík lapjára fordul.

Jeney Tamás (Miskolc, Földes F. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján