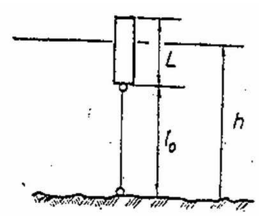
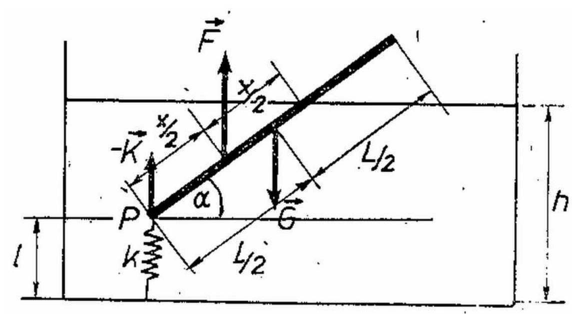


Jellemezzük a rúd helyzetét a vízszintessel bezárt α szöggel és azon végpontjának az edény aljából való távolságával (l), amihez a rugót erősítettük.

a) $h \leq l_0 = 30$ cm esetén a rugalmast szál laza, a rúd úszik a felszínen, tehát $\alpha = 0$ és $l = h$.

b) $h > l_0$ a rugó már feszes, és a rúd x hosszúságú darabja a víz alatt van. A rúdra ható $G = AL\varrho g$ nagyságú súlyerőt, az $F = Ax\varrho_v g$ nagyságú felhajtóerőt, valamint a $K = k(l - l_0)$ nagyságú rugóerőt és ezek támadáspontját az 1. ábra szemlélteti.



1. ábra

Mivel **G** és **F** hatásvonala függőleges, az egyensúly szükséges feltétele hogy **K** hatásvonala is ilyen irányú legyen. A $\Sigma\mathbf{F} = 0$ és a $\Sigma\mathbf{M} = 0$ egyensúlyi feltételek (az utóbbi a P pontra) felírva:

$$G + K - F = AL\varrho g + k(l - l_0) - Ax\varrho_v g = 0, \tag{1}$$

$$F(x/2)\cos\alpha - G(L/2)\cos\alpha = (x^2/2)A\varrho_v g\ \cos\alpha - (L^2/2)A\varrho g\cos\alpha = 0. \tag{2}$$

Ezenkívül az ábráról leolvasható, hogy

$$l + x\sin\alpha = h. \tag{3}$$

Tegyük fel egyelőre, hogy $\cos\alpha \neq 0$, ekkor a fenti egyenletrendszer megoldása:

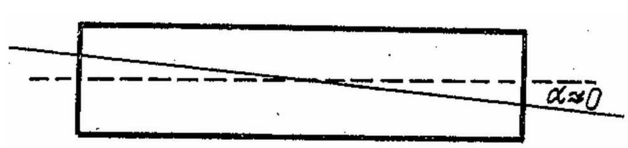
$$x = L\sqrt{\varrho/\varrho_v} = 77{,}5 \text{ cm}, \tag{4a}$$

$$l = l_0 + \frac{AL\varrho g}{k}\left(\sqrt{\frac{\varrho_v}{\varrho}} - 1\right) = 31{,}8 \text{ cm} \tag{4b}$$

$$\sin\alpha = \frac{h - \left[l_0 + \frac{AL\varrho g}{k}\left(\sqrt{\frac{\varrho_v}{\varrho}} - 1\right)\right]}{L\sqrt{\frac{\varrho}{\varrho_v}}} = 1{,}3 \cdot 10^{-2}\ \text{cm}^{-1} \cdot h - 0{,}41. \tag{4c}$$

Mivel $0 \leq \sin\alpha \leq 1$, a fenti megoldás csak a 31,8 cm $\leq h \leq$ 109,3 cm szintmagasságokra érvényes.

Érdekes ezt összevetni az *a)* esettel, ahol $0 \leq h \leq 30$ cm. Úgy tűnik, hogy 30 cm $< h <$ 31,8 cm esetén a rúd helyzetéről semmit sem tudunk mondani. Ennek oka az, hogy nagyon kis α szögek esetén a (2) egyenlet felírásánál használt vékony rúd közelítés nem igaz (l. 2. ábrát).



2. ábra

c) $h > 109{,}3$ cm esetén a rúd már függőleges,
teljes elmerüléséig az egyensúly feltétele az (1)–(3) egyenlet (most $\sin\alpha = 1$), amelynek megoldása

$$l = \frac{A\varrho_v g \cdot \left(h - L\frac{\varrho}{\varrho_v}\right) + kl_0}{k + A\varrho_v g} = 9 \cdot 10^{-2} h + 21{,}8 \text{ cm} \tag{5}$$

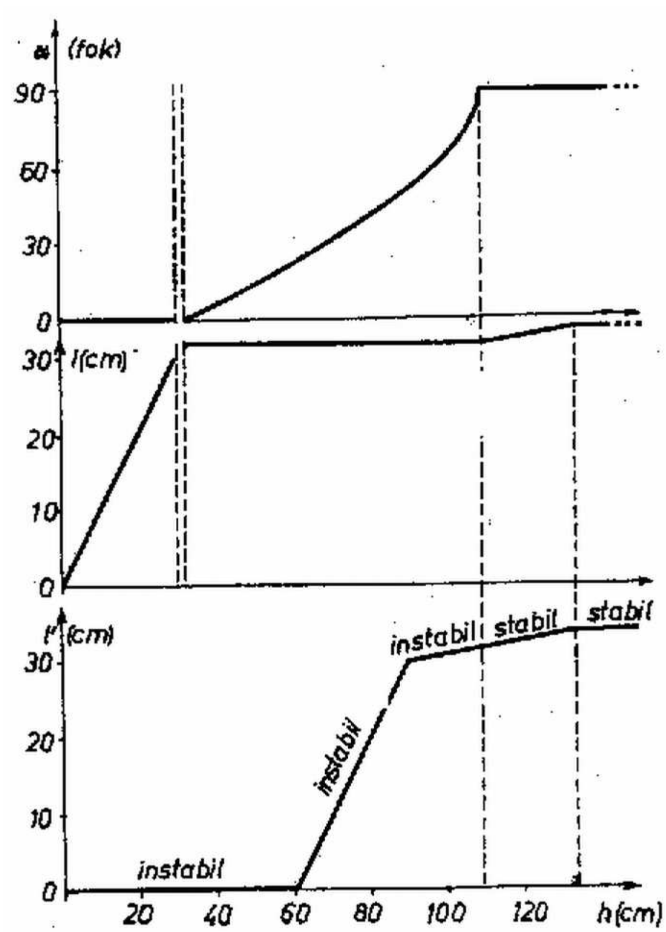
$$\alpha = 90^\circ.$$

A rúd akkor merül el, ha $h - l = L$, vagyis (5) alapján $h = 133{,}8$ cm-es vízmagasságnál.

d) $h > 133{,}8$ cm esetén a felhajtóerő állandó, ezért a rugóerő sem nő tovább. Ekkor (5)-ből

$$l = 33{,}8 \text{ cm}, \qquad \alpha = 90^\circ.$$

Az $l(h)$, $\alpha(h)$ függvények menetét *a)–c)* pontok alapján a 3. ábra tünteti fel.



3. ábra

Térjünk vissza ezek után a (2) egyenlethez. Látjuk, hogy ez akkor is teljesül, ha $\cos\alpha = 0$, vagyis $\alpha = 90^\circ$. Ez azt jelenti, hogy létezik az eddigiektől különböző megoldása az (1) –(3) egyenletrendszernek, amikor is a rúd végig függőleges helyzetű.

Ezt a helyzetet (elvileg) úgy valósíthatjuk meg, hogy a rudat az edény aljára állítjuk, majd megkezdjük a víz betöltését. A továbbiakban röviden vizsgáljuk meg ezt az esetet is!

A) A rúd akkor kezd el úszni, amikor $F = G$, vagyis ($\varrho/\varrho_v = 0{,}6$ miatt) amikor $0,6$ része már víz alatt van. Ezért $0 \le h < h_0 = 60$ cm esetén $l' = 0$.

B) $h_0 < h \le h_0 + l_0 = 90$ cm vízmagasság mellett a rugó még laza, ekkor

$$l' = h + h_0.$$

C) $h > h_0 + l_0$ esetén egészen a teljes elmerülésig a rúd helyzetét a (5) függvény írja le.

D) Megegyezik a *d)* pontban leírtakkal.

Az $l'(h)$ függvényt szintén a 3. ábrán szemléltettük.

Horváth Gábor (Kiskunhalas, Szilády Á. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A rúd függőleges helyzete nem minden esetben stabilis. Az 1. ábra alapján beláthatjuk, hogy ehhez az szükséges, hogy $F(x/2) > G(l/2)$ legyen. A (4a) képlet szerint ez akkor következik be, ha $x > L\sqrt{\varrho/\varrho_v} = 77{,}5$ cm, vagyis – (5) alapján – ha $h > 109{,}3$ cm.