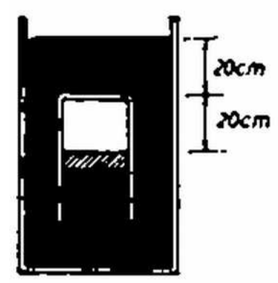
Jelöljük az edény keresztmetszetét A_1-gyel, a hengerét A_2-vel, a hengerben levő levegő magasságát h-val, a henger feneke és a higanyfelszín közti távolságot l-lel.

Egyensúly esetén a henger fenekére ható külső és belső nyomás egyezik meg, így a bezárt levegő nyomása kezdetben: $p_1 = p_0 + l\gamma_{\mathrm{Hg}}$, ahol p_0 a külső légnyomás, γ_{Hg} pedig a higany fajsúlya.



Ha a hőmérsékletet T_1-ről T_2-re emeljük, akkor a bezárt levegő kitágul, s a henger x emelkedésével a higanyszint magassága $x \cdot (A_2/A_1)$-gyel nő. A belső nyomás ekkor

$$p_2 = p_0 + [l - x + x(A_2/A_1)]\,\gamma_{\mathrm{Hg}}.$$

Alkalmazva az egyesített gáztörvényt:

$$\frac{p_1 A_2 h}{T_1} = \frac{p_2 A_2 (h+x)}{T_2},$$

vagyis

$$\frac{(p_0 + l\gamma_{\mathrm{Hg}})h}{T_1} = \frac{\left[p_0 + \left(l - x + \frac{A_2}{A_1}\cdot x\right)\gamma_{\mathrm{Hg}}\right](h+x)}{T_2}. \tag{1}$$

Adatainkat ($T_1 = 0$ ℃, $T_2 = 47$ ℃, $A_1 = 20\ \mathrm{cm}^2$, $A_2 = 10\ \mathrm{cm}^2$, $l = h = 20$ cm) behelyettesítve kapjuk, hogy

$$x \approx 4\ \mathrm{cm}.$$

Tehát ennyit emelkedik a henger a hőmérséklet növelésével.

A hengerben levő levegő súlya elhanyagolható, ezért a fonál a bezárt levegővel megegyező magasságú higany nyomásával tart egyensúlyt. A fonálerő tehát kezdetben $F_1 = A_2 h\gamma_{\mathrm{Hg}} \approx 2{,}7$ kp, melegítés után $F_2 = A_2(h+x)\gamma_{\mathrm{Hg}} \approx 3{,}2$ kp.

Számítsuk ki, hogyan függ x az edény méretéből.

Az (1) egyenletben A_1-et és A_2-t paraméterként meghagyva x-re a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$x^2 + \left(20 + 96\frac{A_1}{A_2 - A_1}\right)x - 330\frac{A_1}{A_2 - A_1} = 0,$$

tehát a henger helyzete a következőképpen függ az edény és a henger keresztmetszetétől:

$$x = \frac{48A_1}{A_1 - A_2} - 10 - \sqrt{\left(\frac{48A_1}{A_2 - A_1} + 10\right)^2 + 330\frac{A_1}{A_2 - A_1}}.$$

Ha $A_1 = \infty$, akkor $x = 4{,}6$ cm, ha pedig $A_1 = A_2$, akkor $x = 3{,}4$ cm. Vizsgáljuk meg az egyensúlyi helyzet stabilitását!

A fenékre ható erő 0 ℃-on a Δx elmozdulás függvényében

$$K = A_2\left\{\Delta x\frac{A_1 - A_2}{A_1}\gamma_{\mathrm{Hg}} - \left[(p_0 + l\gamma_{\mathrm{Hg}}) - (p_0 + l\gamma_{\mathrm{Hg}})\frac{h}{h + \Delta x}\right]\right\}.$$

Ha Δx infinitezimális, akkor

$$K/\Delta x = A_2\left[\frac{A_1 - A_2}{A_1}\gamma_{\mathrm{Hg}} - \frac{1}{h}(p_0 + l\gamma_{\mathrm{Hg}})\right].$$

A megadott értékeknél $K/\Delta x$ negatív, így az egyensúlyi helyzet stabil, hiszen az elmozdulással ellentétes visszatérítő erő lép fel. Ugyanez a helyzet 47 ℃-on is. Megjegyzendő, hogy elég nagy h-t választva az egyensúlyi helyzet labilissá tehető.

Horváth István (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján