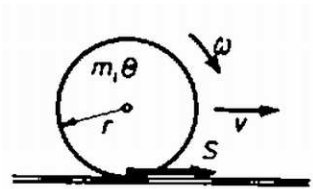


I. Egy kezdetben forgó és haladó test viselkedését vizsgáljuk. Megfelelő külső erő hatására forgómozgása lassul, ezzel a teljes mozgási energiája csökken, ill. haladási sebessége nő ennek során növekszik impulzusa. Így teljesülhetnek a feladat feltételei.

Tekintsünk egy konkrét példát! Θ tehetetlenségi nyomatékú, m tömegű, r sugarú, kezdetben ω szögsebességgel és v tömegközépponti sebességgel mozgó hengert vagy golyót helyezünk vízszintes lapra. A súrlódási erő (S) annyi ideig (t) gyorsítja a testet, amíg gördülés nem jön létre (1. ábra). Ezután egyenletes v' sebességgel és ω' szögsebességgel fog mozogni.



1. ábra

A kívánt impulzus- és energiamérleg:

$$(1) \quad 2I = 2mv = mv' = I',$$

$$(2) \quad E = (1/2)mv^2 + (1/2)\Theta\omega^2 = mv'^2 + \Theta\omega'^2 = 2E'.$$

A tiszta gördülés feltétele:

$$(3) \quad \omega' = v'/r.$$

Az impulzus (I) és impulzusmomentum (N) megváltozását a mozgásegyenletek alapján határozhatjuk meg:

$$(4) \quad St = I' - I = mv,$$

$$(5) \quad -S tr = N' - N = \Theta(\omega' - \omega).$$

Az (1) és (3) egyenletekből ω' -t és v' -t a kezdeti adatokkal kifejezhetjük. Helyettesítsük be eredményünket egyrészt (2)-be, majd rendezzük át az egyenletet:

$$(6) \quad \omega^2 = \frac{7mv^2}{\Theta} + \frac{8v^2}{r^2}.$$

Másrészt helyettesítsük be előbbi eredményünket (4)-be és (5)-be, majd osszuk el (5)-öt (4)-gyel és fejezzük ki ω -t:

$$(7) \quad \omega = \frac{2v}{r} + \frac{mvr}{\Theta}.$$

(6) és (7) nem mondhat ellent egymásnak, ezért (7)-et négyzetre emelve a jobb oldalakat egyenlővé tehetjük. v^2 -tel való egyszerűsítés után a

$$(4/r^2)\Theta^2 + 3m\Theta - m^2r^2 = 0$$

egyenlet adódik. Ennek megoldása

$$(8) \quad \Theta = (1/4)mr^2.$$

(7)-be helyettesítve az

$$(9) \quad \omega = 6v/r,$$

egyenlőséghez jutunk.

Nem nehéz belátni, hogy ha egy a (8) és (9) tulajdonságokkal rendelkező (nem egyenletes sűrűségű) golyót helyezünk vízszintes lapra, akkor a kívánt feltételek valóban teljesülnek.

A súrlódási együttható konkrét értéke nem játszik szerepet a feladat megoldásában. Az S súrlódási erő által a tiszta gördülésig átadott impulzus független S nagyságától.

Glück Ferenc (Bp., Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., III. o. t.)

II. Most olyan esetet vizsgálunk, amelyben a „test” két független részből áll. Mozogjon kezdetben az m_1 tömegű rész v_1 ($v_1 < 0$), az m_2 tömegű rész pedig v_2 sebességgel (2. ábra)!



2. ábra

Hassunk külső F erővel m_1 -re (sebességével ellentétes irányban), amíg v'_1 sebességre nem tesz szert. A másik test mozogjon zavartalanul.

A két darabból álló testre felírjuk az energia- és impulzusmegváltozás általunk kirótt feltételeit:

$$(10) \quad E = (1/2)m_1v_1^2 + (1/2)m_2v_2^2 = m_1v_1'^2 + m_2v_2^2 = 2E';$$

$$(11) \quad 2I = 2m_1v_1 + 2m_2v_2 = m_2v_2 + m_1v_1' = I'.$$

Mindkét egyenletből kifejezhetjük v'_1 -t:

$$(12) \quad v_1'^2 = \frac{v_1^2}{2} - \frac{m_2}{2m_1} v_2^2,$$

$$(13) \quad v_1' = 2v_1 + \frac{m_2}{m_1} v_2.$$

Az egyenletek nem lehetnek ellentmondóak, ezért

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{m_2}{2m_1} v_2^2 = \left(2v_1 + \frac{m_2}{m_1} v_2\right)^2.$$

Ezt például v_1 -re megoldva egy, a kezdeti adatok közötti összefüggéshez jutunk:

$$(14) \quad v_1 = \frac{v_2 m_2}{7m_1} \left(-4 \pm \sqrt{2 - 7 \frac{m_1}{m_2}}\right).$$

Az impulzusnövekedést csak akkor kísérheti az összenergia csökkenése, ha $v_1 < 0$, miközben $v_2 > 0$. Ez (14) fennállása esetén mindig teljesül. Fenn kell még állnia a

$$(15) \quad (2/7) \geq m_1/m_2$$

egyenlőtlenségnek.

(13)-ba (14) alapján v_1 -et behelyettesíthetjük:

$$(16) \quad v_1' = \frac{v_2 m_2}{7m_1} \left(-1 \pm 2\sqrt{2 - 7 \frac{m_1}{m_2}}\right).$$

A szükséges külső F erőhatás t ideig tart. Ezalatt m_1 felveszi a v_1' sebességet:

$$(17) \quad Ft = m_1(v_1' - v_1) = \frac{v_2 m_2}{7} \left(3 \pm \sqrt{2 - 7 \frac{m_1}{m_2}}\right).$$

Eszerint mindig $F > 0$ kell, hogy legyen.

A fentiek alapján könnyen látható, hogy ha a (14) és (15) feltételeket kielégítő kezdeti állapot után az m_1 tömegű testnek (17) szerinti Ft impulzust adunk, akkor az összimpulzus kétszeresére nő, míg a teljes mozgási energia a felére csökken.

III. A harmadik eset leírásakor tágabban értelmezzük a feladatot. Az energiacsökkenést ne közvetlenül a külső erő okozza, hanem belső disszipáció. Ilyen lehet a rugalmatlan ütközés.

A 3. ábra szerint mozogjon egy m_1 tömegű test v sebességgel a nyugvó m_2 test felé, majd ütközzenek rugalmatlanul.



3. ábra

A közös v^* sebességük felvétele után impulzusukat kétszeresére növelő külső erővel hassunk rájuk. Az ütközést az impulzusmegmaradással írhatjuk le:

A kívánt feltételek:

$$(19) \quad 2I = 2(m_1 + m_2)v^* = (m_1 + m_2)v' = I',$$

$$(20) \quad E = (1/2)m_1v^2 = (m_1 + m_2)v'^2 = 2E',$$

ahol v' a gyorsítás utáni sebesség és $E = (1/2)m_1v^2$ a teljes rendszer mozgási energiája az ütközés előtt.

(19) és (20)-ból (18) felhasználásával v' -t kifejezzük.

$$v' = \frac{2m_1v}{m_1 + m_2}, \quad \text{ill.} \quad v'^2 = \frac{m_1v^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Akkor nem jutunk ellentmondásra, ha

$$\left(\frac{2m_1v}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{m_1v^2}{2(m_1 + m_2)},$$

azaz, ha

$$m_2 = 7m_1.$$

Ebben az esetben v kezdősebesség mellett az ütközés után $v^* = v/8$ lesz a közös sebesség. (19) alapján $v' = v/4$, azaz $(v/8)$ -ról $(v/4)$ -re kell a $8m_1$ tömegű testet felgyorsítanunk. Ezzel összhangban van az

$$(21) \quad Ft = m_1v.$$

egyenlőség.

Valószínűleg meg a kezdeti állapotot nehézségi erőterben! Az m_1 tömegű test legyen a nagyobb test fölött, és indítsuk v , lefelé irányuló kezdősebességgel, míg a másik testet csak elengedjük. Az ütközésig v marad relatív sebességük.

Pongyolán fogalmazva, az „egész test”-re $F = 8m_1g$ erő hat. (21) szerint ennek $t = v/(8g)$ ideig kell hatnia. Ha ezalatt már egymáshoz tapadtak a testek, akkor a t pillanatban a feladat feltételeinek eleget tesz a rendszer. Ha t kicsi, akkor m_1 -et m_2 -höz közelebből kell indítani.

Tokaji Zsolt (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o.t.)

Megjegyzés. Olyan megoldás legfeljebb 1 pontot kaphatott, amelyben a vizsgált test tömege a folyamat közben „nőtt meg”, például azért, hogy rátettek egy másikat.