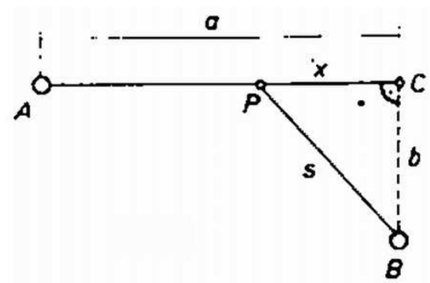
I. megoldás. A műútról a P pontban térjen le a traktor. Sebessége a műúton $v_1 = 30$ km/h, a szántón $v_2 = 15$ km/h. A műúton való haladás t_1 ideje az 1. ábra alapján:

$$t_1 = \frac{a-x}{v_1}.$$



1. ábra

Világos, hogy a szántón a traktornak egyenes úton kell haladnia. Így a szántón megtett út hossza:

$$s = \sqrt{b^2 + x^2},$$

a szántóföldön haladás ideje $t_2 = s/v_2$.

A $t = t_1 + t_2$ idő minimumát keressük.

A $t(x)$ függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol $\frac{\mathrm{d}t(x)}{\mathrm{d}x} = 0$. Végezzük el a deriválást:

$$\frac{\mathrm{d}t(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{v_1} + \frac{x}{v_2\sqrt{b^2+x^2}}.$$

A szélsőérték helyre teljesülnie kell, hogy

$$-\frac{1}{v_1} + \frac{x}{v_2\sqrt{b^2+x^2}} = 0.$$

Ebből

$$x = x_0 = \sqrt{\frac{v_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}\,b, \qquad \text{ha} \qquad v_1 > v_2.$$

Nem nehéz belátni, hogy $x > x_0$ esetén $\frac{\mathrm{d}t(x)}{\mathrm{d}x} > 0$, $0 < x < x_0$ esetén pedig $\frac{\mathrm{d}t(x)}{\mathrm{d}x} < 0$, így az $x = x_0$ helyen $t(x)$ valóban minimális.

A megadott értékekkel $x_0 = \sqrt{3}$ km.

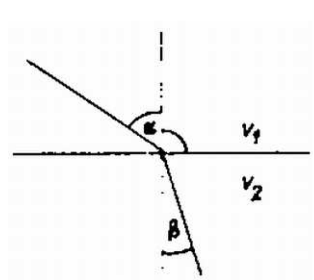
Tehát a műúton megtett út

$$y - (12 - \sqrt{3})\ \text{km} \approx 10{,}27\ \text{km}.$$

Megemlítjük, hogy $v_1 \leq v_2$ esetén nyilvánvaló, hogy a traktornak azonnal le kell térnie az útról és egyenesen kell haladnia az A pontból B felé.

Bálint Tünde (Dunaújváros, Münnich F. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Ha van két fényáteresztő közegünk, a fény úgy halad át rajtuk, hogy teljesül az ún. Fermat elv, mely szerint a fénysugár valóban megtett útja két pont között, a lehetséges utak közül a minimális időtartamú.



2. ábra

Ebből adódik a fénytörésre vonatkozó Snellius–Descartes törvény, amely szerint

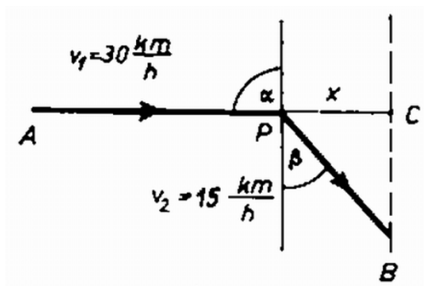
$$\sin\alpha/\sin\beta = v_1/v_2, \tag{1}$$

ahol v_1 és v_2 a terjedési sebességek a két közegben (2. ábra).

A fentieket megfontolva az (1) képletet alkalmazhatjuk jelen feladatunkra is. Esetünkben $\alpha = 90^\circ$, tehát $\sin\alpha = 1$. A v_1/v_2 arány a feladat alapján 2.

Ezek alapján

$$\sin\beta = 1/2, \qquad \beta = 30^\circ,$$
$$x = b\,\mathrm{tg}\,\beta = \sqrt{3}\,\mathrm{km}\ (\approx 1{,}73\ \mathrm{km}).$$



3. ábra

Károlyi Gyula (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Többen közelítő módszerrel keresték meg a minimumot. A megfelelő pontosságú eredményeket helyes megoldásként értékeltük.