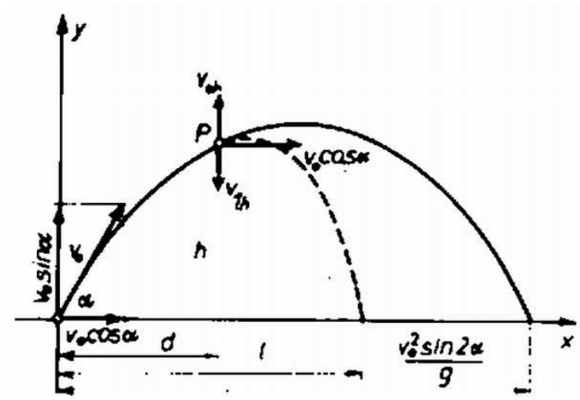
Vegyünk fel a függőleges síkban egy derékszögű koordináta-rendszert és indítsuk az M tömegű testet ennek origójából. Az origótól d távolságban az M tömegű test h magasságot ér el.



A ferde hajítás pályaegyenletéből

$$h = d \cdot \text{tg}\ \alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2 \cos^2\ \alpha}. \tag{1}$$

Ütközés előtt a P pontban az M tömegű test sebességének vízszintes és függőleges komponense

$$\mathrm{v}_{0h} = \pm\sqrt{v_0^2 \sin^2\ \alpha - 2gh};$$

a függőlegesen feldobott m tömegű test sebességkomponensei:

$$v_{1x} = 0; \qquad v_{1h} = \pm\sqrt{v_1^2 - 2gh} \tag{3}$$

A két test rugalmatlan ütközés után közös sebességgel folytatja útját, amelynek komponenseit jelölje u_x, ill. u_y.

Az impulzusmegmaradás törvényéből:

$$Mv_{0x} = (M+m)u_x; \qquad Mv_{0h} + mv_{1h} = (M+m)u_y. \tag{4}$$

(4)-ből (2) és (3) felhasználásával kapjuk:

$$u_x = \frac{Mv_0\ \cos\ \alpha}{M+m}; \tag{5}$$

$$u_y = \frac{\pm M\sqrt{v_0^2 \sin^2\ \alpha \pm 2gh} \pm m\sqrt{v_1^2 - 2gh}}{M+m}. \tag{6}$$

Vizsgáljuk meg a kapott (6) kifejezést! A számlálóban mindkét tag előtt bármelyik előjel állhat, így u_y-ra négy különböző érték adódik. Vegyük sorra ezek fizikai jelentését!

$0 < d < \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$ esetén (a két test az M tömegű test pályájának felszálló ágában találkozik) az előjelek $(+,+)$, ill. $(+,-)$ aszerint, hogy az m tömegű test „alulról” vagy „ felülről” ütközik az M tömegű testbe. Az ábrán az utóbbit rajzoltuk fel.

$\dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} < d < \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ esetén (a két test a M tömegű test pályájának leszálló ágában ütközik), az előjelek a fentieknek megfelelően $(-,+)$, ill. $(-,-)$.

A két test találkozásának szükséges feltétele:

$$0 \leq d \leq \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Megjegyezzük, hogy lehetséges $d = 0$, $d = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ és $d = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$ megválasztása is a feladat paramétereinek. Ezek azt jelentik, hogy a két test rendre az M tömegű test pályájának kezdő-, vég-, ill. tetőpontjában ütközik. Ezek a lehetőségek azonban nyilván bennfoglaltatnak az (5) képletben, ui. akkor rendre $h = 0$, $h = v_0^2 \sin^2\ \alpha/2g$, $h = 0$.

Nézzük meg ezek után, hogy az origótól milyen l távolságban ér földet a két test! Ütközés után a vízszintes és függőleges elmozdulás:

$$x = d + u_x \cdot t, \tag{7}$$

$$y = h + u_y \cdot t - (g/2)t^2. \tag{8}$$

(7)-ből és (8)-ból t kiküszöbölésével kapjuk a következő pályaegyenletet:

$$y - h = \frac{u_y}{u_x}(x-d) - \frac{g}{2u_x^2}(x-d)^2. \tag{9}$$

Földetéréskor $x = l$, $y = 0$, amit (9)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$l = d + \frac{u_x}{g}\left(u_y + \sqrt{u_y^2 + 2gh}\right),$$

ahol h, u_x, u_y rendre az (1), (5) és (6) kifejezések által adott. Mivel mindig $l > d$, ezért (9) másik megoldásának nincs fizikai értelme.

Jeney Tamás (Miskolc, Földes F. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A függőleges impulzus-komponensekre a (4) megmaradási törvény csak akkor igaz (ütközéskor a belső erőkön kívül hat a nehézségi erő is), ha az ütközést pillanatszerűnek tételezzük fel.

Ha ui. az ütközéskor működő belső erők abszolút értékét F-fel jelöljük, akkor ütközéskor a mozgásegyenletek

$$\frac{\Delta(Mv_{0h})}{\Delta t} = -Mg + F,$$

$$\frac{\Delta m(v_{1h})}{\Delta t} = -mg - F.$$

A két egyenletet összeadva kapjuk, hogy

$$\Delta(Mv_{0h} + mv_{1h}) = -(M+m)g\Delta t.$$

Látható, hogy $\Delta t \to 0$ esetén valóban $\Delta(Mv_{0h} + mv_{1h}) = 0$.

Oszlányi Gábor (Miskolc, Földes F. Gimn., II. o. t.)