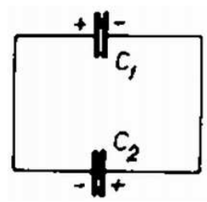
Jelöljük a kondenzátorok adatait rendre C_1, C_2; Q_1, Q_2; U_1, U_2-vel. Összekapcsolásuk után a töltésvándorlás addig tart, amíg a kondenzátorok feszültsége kiegyenlítődik. Jelöljük U_k-val a közös feszültséget, ekkor a töltésmegmaradás miatt:

$$C_1U_1 + C_2U_2 = (C_1 + C_2)U_k,$$

vagyis

$$U_k = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2}.$$



Az összekötő vezetékeken fejlődő hő a kondenzátorok összenergiájának csökkenéséből származik:

$$\Delta E = (1/2)C_1U_1^2 + (1/2)C_2U_2^2 - (1/2)(C_1 + C_2)U_k^2 = \frac{1}{2}\,\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\,(U_2 - U_1)^2.$$

A feladat szerint $U_2 = -U_1 = U$, így a felszabaduló hő (Q^*):

(1) $$Q^* = \Delta E = \frac{2C_1C_2}{C_1 + C_2}\,U^2.$$

Látjuk, hogy ennek nagyságát R (nullától különböző) értéke nem befolyásolja, R csak a töltéskiegyenlítődés idejét szabja meg. R növekedésével ugyanis a körben folyó áramerősség csökken, ami azt jelenti, hogy az adott mennyiségű – csupán a kondenzátorok kezdeti feszültségétől függő – töltés átáramlásához egyik kondenzátorról a másikra hosszabb időre lesz szükség.

Szalontai Zoltán (Törökszentmiklós, Bercsényi M. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Az R ellenálláson fejlődő hőt más úton is kiszámíthatjuk. Ez a számolás kissé bonyolultabb, ezzel szemben explicit kifejezést kapunk, hogyan függ a folyamat időtartama R-től.

Az összekapcsolás utáni t időpontban a huroktörvényből:

$$\frac{Q_1(t)}{C_1} + \frac{Q_2(t)}{C_2} = I(t)R, \quad \text{ahol} \quad Q_1(t) = Q_1 - \int_0^t I(t')\,\mathrm{d}t', \quad Q_2(t) = Q_2 - \int_0^t I(t')\,\mathrm{d}t'$$

a kondenzátorok töltései, $I(t)$ pedig a körben folyó áramerősség. Ezek felhasználásával a fenti egyenlet így alakul:

$$\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} - \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\int_0^t I(t')\,\mathrm{d}t' = I(t)R.$$

Differenciáljuk mindkét oldalt t szerint:

(2) $$-\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) I(t) = \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}\,R.$$

Figyelembe véve, hogy $I(0) = \dfrac{U_2 - U_1}{R}$, (2) megoldása

$$I(t) = \frac{U_2 - U_1}{R}\,\mathrm{e}^{-t/(RC)},$$

ahol

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}.$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy ez az $I(t)$ függvény valóban kielégíti a (2) differenciálegyenletet és a kezdeti feltételt. A (2) differenciálegyenlet esetében elemi úton is könnyen belátható, hogy adott kezdeti feltételt kielégítő megoldása egyértelmű.

Látjuk, hogy a folyamat sebességét a $\tau = RC$ időállandó jellemzi, ami R-rel arányos. τ idő alatt a kezdeti $\dfrac{U_2 - U_1}{R}$ áramerősség kb. 1/3-ára csökken, de a zérus értéket elméletileg csak végtelen hosszú idő alatt éri el. Ezek után a fejlődő hőt (Q^*) így számíthatjuk ki:

$$Q^* = \int\limits_0^\infty I^2(t) R \,\mathrm{d}t = \frac{(U_2 - U_1)^2}{R} \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-2t/(RC)} \,\mathrm{d}t = \frac{(U_2 - U_1)^2}{2} C.$$

$U_2 = -U_1 = U$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$Q^* = 2U^2 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2},$$

ami megegyezik (1)-gyel.

Krausz Ferenc (Mór, Táncsics M. Gimn., IV. o. t.)