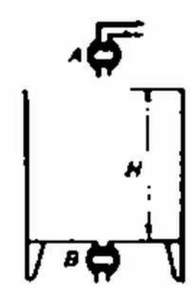
A tartály egyenletesen telik, ha csak az A csap van nyitva. Jelöljük q_A-val a csap keresztmetszetét, v_A-val a rajta átfolyó víz sebességét, T-vel a hasáb vagy henger alakú edény alapterületét. Ekkor az edénybe időegység alatt $q_A v_A$ térfogatú víz folyik be, azaz a pillanatnyi vízmagasságot h-val jelölve

(1) $$\frac{Th}{t} = q_A v_A.$$

A H magasságot t_A idő alatt éri el a vízszint, ezért

(2) $$\frac{TH}{t_A} = q_A v_A.$$



Zárjuk el az A és nyissuk ki a B csapot. Tegyük fel, hogy a tartály alapterületéhez képest jóval kisebb a csap q_B keresztmetszete. Ekkor a kifolyás közben az edényben levő víz mozgási energiája elhanyagolható. A nehézségi erő által a teljes víztömegen végzett munka csak az időegység alatt kifolyó, $q_B v_B$ térfogatú víz mozgási energiáját növeli. Ez a munka megegyezik azzal, amit a nehézségi erő akkor végez, ha a h magasságú vízoszlop felszínéről az adott térfogatú vizet az edény alján levő csaphoz visszük. Ezért

(3) $$v_B = \sqrt{2gh}.$$

Ez Torricelli tétele. (A veszteségektől eltekintettünk).

Ha kicsiny Δt idő alatt a vízmagasság Δh-val csökken, akkor a v_B sebességet ezalatt állandónak tekintve írhatjuk:

$$T\Delta h = -q_B v_B \Delta t,$$

így a $\Delta t \to 0$ határátmenettel kapjuk, hogy a magasság időegységre eső csökkenését a

(4) $$\frac{T\,\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -q_B v_B = -q_B\sqrt{2gh}$$

egyenlet írja le.

Határozzuk meg ennek alapján a q_B keresztmetszetet. Célszerű $t = 0$ időpontnak venni azt a pillanatot, amikor az edény éppen kiürült, továbbá t helyett bevezetni $\tau = -t$ változót. Ekkor $\tau = t_B$ (azaz $t = -t_B$) esetén lesz a h magasság H, továbbá a (4) egyenlet így írható:

(5) $$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\tau} = \sqrt{2\frac{q_B^2}{T^2}g} \cdot \sqrt{h}.$$

Tehát olyan $h(\tau)$ függvényt keresünk, amely kielégíti az (5) összefüggést (differenciálegyenletet) és a $h(0) = 0$ kezdeti feltételt. Ugyanilyen típusú egyenletnek tesz eleget az egyenletesen gyorsuló mozgás út–idő függvénye:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2ax},$$

ahol a a gyorsulás, ennek az $x(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$s = (a/2)t^2.$$

Ennek alapján várható, hogy

$$h(\tau) = (1/2)(q_B^2/T^2)g \cdot \tau^2,$$

és ez valóban kielégíti az (5) egyenletet, valamint a $h(0) = 0$ kezdeti feltételt.

Matematikai és fizikai megfontolásokkal be lehet bizonyítani, hogy a magasságot leíró $h(\tau)$ nem lehet más. Így $\tau = t_B$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

(6) $$H = \frac{1}{2}g\frac{q_B^2}{T^2}t_B^2,$$

ahonnan

$$q_B = \sqrt{\frac{2H}{g}}\,\frac{T}{T_B}. \tag{7}$$

Nyissuk ki mindkét csapot! Tegyük föl, hogy az A csapból kifolyó víz mozgási energiája a B csapon kifolyó víz kinetikus energiáját nem növeli (pl. a befolyó víz energiája teljes egészében hővé alakul), azaz a (3) egyenlet változatlanul érvényes. Eszerint $h = 0$ kezdeti vízszintnél csak befolyik a víz az edénybe, de ki nem folyik belőle. A vízmagasság addig növekszik, amíg az időegység alatt ki- és befolyó vízmennyiség meg nem egyezik. A (2), a (4) és a (7) egyenletek alapján ekkor

$$0 = q_A v_A - q_B v_B = \frac{TH}{t_A} - \sqrt{\frac{2H}{g}}\,\frac{T}{t_B}\,\sqrt{2gh^*}$$

azaz

$$h^* = \frac{H}{4}\,\frac{t_B^2}{t_A^2}.$$

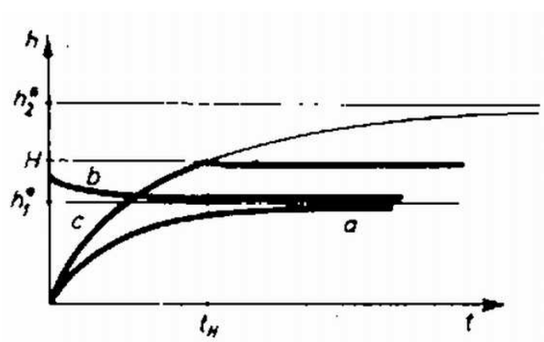
A vízmagaság ezen a szinten stabilizálódik, ha $h^* \le H$, azaz $t_B < 2t_A$. Ellenkező esetben az egyensúlyi magasság H-nál nagyobb lenne, ekkor a tartály megtelik és állandóan víz folyik ki az oldalán.

Szilárd Mónika (Bp., Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., III. o. t.)
és *Horváth Gábor* (Kiskunhalas, Szilády Á. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A (2), (4) és (7) egyenletek alapján abban az esetben, ha mindkét csap nyitva van, a magasságváltozást a

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{H}{t_A} - \frac{2\sqrt{H}}{t_B}\,\sqrt{h}.$$

differenciálegyenlet írja le. Ennek alapos vizsgálatával a következőket lehet igazolni. A $h(t)$ függvény szigorúan monoton nő, illetve csökken attól függően, hogy a folyamat kezdeti pillanatában a magasság kisebb vagy nagyobb-e, mint a $h^* = \frac{H}{h}\frac{t_B^2}{t_A^2}$ magasság. Mindkét esetben, hacsak $h^* \le H$, $t \to \infty$ esetben $h(t)$ tart a h^* értékhez, de véges idő alatt nem éri el azt. Ha $h^* > H$, akkor a vízszint véges idő alatt eléri a H magasságot, s ezután állandóan ezt a szintet tartja, miközben az edény szélén is folyik ki víz.



Az ábrán három kvalitatív $h(t)$ diagramot ábrázoltunk. Az a) görbe a $h_1^* < H$ és $h(0) = 0$, a b) görbe a $h_1^* < H$ és $h_1^* < h(0) < H$, a c) görbe a $h_2^* > H$ és $h(0) = 0$ feltételek mellett mutatja a vízszint magasságának időfüggését.