I. megoldás. Rögzített léc esetén a test harmonikus rezgőmozgást végez, de minden szélső helyzet elérése után egy másik középpont körül más amplitúdóval. (Ezt a problémát részletesen tárgyalja a 1545. feladat megoldása K. M. L. 59 [1979] 175.). Ha a lécet elengedjük, mindössze a rezgés frekvenciája változik meg.

Ebben a megoldásban pusztán energetikai megfontolásokat felhasználva válaszolunk a feladat kérdéseire.

$A_0 = +0{,}1$ m-ről engedjük el a m tömegű testet és az $x = 0$ pont eléréséig a lécet rögzítjük. A rugó kezdeti deformációs energiája részben felgyorsítja a m tömegű testet, részben súrlódási munka végzésére fordítódik, azaz $x = 0$-ban,

(1) $$(1/2)mv^2 = (1/2)(2DA_0^2) - F_sA_0,$$

ahol $2D$ a rendszer direkciós ereje, $F_s = \mu mg$ a súrlódási erő. A léc elengedésétől kezdve a m tömegű test és a léc zárt rendszert alkot (F_s belső erő), és ezért igaz az impulzusmegmaradás tétele. A rendszer impulzusa a deszka elengedése pillanatában:

(2) $$I = mv = m\sqrt{(2D/m)A_0^2 - 2\mu gA_0}.$$

Határozzuk meg a m tömegű test első szélső helyzetét a léc elengedése után. A szélső helyzetben (A_1) a test deszkához viszonyított sebessége nulla, így a közös u sebesség az impulzus megmaradásból kiszámolható:

$$(M + m)u = 1.$$

Az energiamérleg pedig

$$(1/2)(M + m)u^2 + DA_1^2 + F_sA_1 = (1/2)mv^2.$$

A számértékeket ($M = 4$ kg, $m = 1$ kg, $D = 75$ N/m, $\mu = 0{,}4$) behelyettesítve $A_1 = -0{,}04$ m-t kapunk. Ekkor a testre ható $2DA_1 = 6$ N húzóerő nagyobb, mint a súrlódási erő (4 N), tehát a test megindul visszafelé. A következő szélső helyzetben ismét u lesz a közös sebesség, azaz a mozgási energia nem változik meg, tehát

$$DA_1^2 = DA_2^2 + F_s(A_1 - A_2),$$

amiből $A_2 = -0{,}013$ m adódik. Ebben a pontban a mozgási súrlódási erő nagyobb, mint a rugó húzóereje, tehát a test a deszkának ebben a pontjában áll meg. A deszkával együtt azonban u sebességgel halad a nyugvó megfigyelőhöz képest.

Sárközi Imre (Tata, Eötvös J. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Vizsgáljuk meg a test mozgását először rögzített léc esetén. Engedjük el a testet az $x = +A_0$ pontban. A mozgásegyenlet

(1) $$ma = -2Dx + F_s.$$

Könnyű belátni, hogy ezt az egyenletet egy $x = \dfrac{F_s}{2D}$ pont körüli rezgőmozgás kielégíti. Az $x = F_s/2D$ pontban a testre ható erő nulla. A testre ható erő egy tetszőleges x pontban

$$F = -2Dx + F_s.$$

Jelöljük y-nal az x pont távolságát az $F_s/2D$ ponttól, ekkor

$$y = x - F_s/2D.$$

Az új y változóval az

$$F = -2D[y + (F_s/2D)] + F_s = -2Dy,$$

tehát a testre ható erő valóban a kitéréssel arányos, ha a távolságot $x = F_s/2D$ ponthoz képest mérjük. A rezgés amplitúdója és frekvenciája

$$A_1 = A_0 - (F_s/2D), \qquad \omega = \sqrt{2D/m}.$$

Tehát a bal oldalon a maximális kitérés

$$x_{\max} = -A_0 + (F_s/D).$$

Az innen visszainduló testre a mozgásegyenlet

$$ma = -2Dx - F_s, \tag{2}$$

és így a rezgés centruma az $x = -F_s/2D$ pont lesz. A második rezgés amplitúdója

$$A_2 = [+A_0 - (F_s/D)] - (F_s/2D) = A_0 - 3F_s/(2D).$$

A maximális kitérés a jobb oldalon pedig

$$-x_{\max} - (F_s/D). \tag{3}$$

A mozgást tehát színusz függvények írják le, félperiódusonként csökkenő amplitúdóval. (Megjegyezzük, hogy általában csillapított rezgésnek nem ezt a rezgést nevezzük. Csillapított rezgést kapunk akkor, ha a testre ható „súrlódási erő” a sebességgel arányos. Ebben az esetben viszont a rezgés amplitúdója az időben állandóan csökken. A feladatban szereplő esetben az amplitúdó egy félperióduson belül állandó.)

Vizsgáljuk mely, mi történik a léc elengedésekor! Csak belső erők hatnak, így a rendszer impulzusa állandó. Mivel a test léchez képesti mozgását kérdezi a feladat, így érdemes a léchez rögzített koordináta-rendszerben tanulmányozni a test mozgását. Jelöljük '-vel azokat a mennyiségeket, amelyeket a léchez rögzített rendszerben mérünk. Az impulzus megmaradásából kapjuk:

$$m(v' + v) + Mv = \text{állandó},$$

ahol v a léc földhöz mért sebessége. A gyorsulásokra igaz ekkor, hogy:

$$a' = -\frac{M+m}{m}a.$$

Gyorsuló rendszerben az (1) egyenlet

$$ma' = -ma - 2Dx + F_s$$

alakú lesz, amit átrendezve

$$\frac{Mm}{M+m}a' = -2Dx + F,$$

kifejezést kapjuk. Látjuk tehát, hogy a léc elengedése után is rezgő mozgást végez a test, de tömege látszólag megváltozott. Ezért a rezgés frekvenciája is más lesz:

$$\omega' = \sqrt{\frac{2D}{m} \cdot \frac{M+m}{m}}.$$

Számoljuk ki most is a bal oldali maximális kitérést! A rezgést az

$$x = A' \sin(\omega' t + \varphi) + (F_s/D2)$$

függvény írja le. A rezgés A' amplitúdóját és φ-t a kezdőfeltételek határozzák meg. Mérjük az időt léc a elengedése pillanatától. Ekkor a test az $x = 0$ pontban van, és a sebessége

$$v_0 = \frac{2(DA_0^2 - F_s A_0)}{m}.$$

Tehát $t = 0$-ban

$$x = A' \sin\varphi + (F_s/2D) = 0,$$

$$v = A'\omega \ \cos \ \varphi = v_0.$$

Az egyenletrendszerből A' és φ meghatározható. A feladat megoldásához csak A'-re van szükségünk, ami

$$A' = \sqrt{\left(\frac{F_s}{2D}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2},$$

amivel a maximális kitérés a bal oldalon

$$x'_{\max} = \frac{F_s - \sqrt{F_s^2 + \frac{2Dv_0^2 Mm}{M+m}}}{2D} = -0{,}04 \text{ m}.$$

A mozgást a továbbiakban úgy tárgyaljuk, mint álló léc esetén (mert a frekvenciától az amplitúdó független) csak a (3)-ba $x_{\max}$ helyére $x'_{\max}$ írandó. Ezzel a jobb oldali kitérés:

$$-x'_{\max} - (Fs/D) = -0{,}013 \text{ m}.$$

Ebből a pontból már újabb rezgés nem indul el, mert a súrlódási erő nagyobb mint a rugó húzóereje.