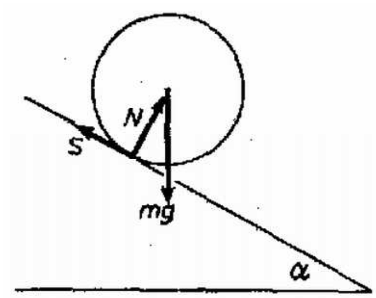
Először határozzuk meg a golyó gyorsulását! A golyóra súlyereje, a lejtő nyomóereje és a súrlódási erő hat (1. az ábrát). A golyó tömegközéppontja a lejtőre merőlegesen nem gyorsul, lejtő irányú gyorsulása a.



Newton II. törvényéből

(1) $$mg\cos\alpha - N = 0,$$

(2) $$mg\sin\alpha - S = ma.$$

A forgómozgás alapegyenlete:

(3) $$Sr = \theta\beta = (2/5)mr^2\beta.$$

1. Ha a gömb csúszás nélkül gördül, akkor

(4) $$a_1 = \beta_1 r.$$

A (2)-(4) egyenletekből a gyorsulás:

(5) $$a_1 = \beta_1 r = (5/7)g\sin\alpha \approx 3,57\mathrm{m/s}^2.$$

A tapadás feltétele (1), (3) és (4) alapján

$$S = (2/5)ma_1 \leqq \mu N = \mu mg\cos\alpha,$$

ahonnan (5) folytán

(6) $$\mu \geqq \mu_0 = (2/7)\mathrm{tg}\ \alpha = 0,165.$$

2. Ha ez a feltétel nem áll fenn, a gömb csúszva gördül. Ekkor csúszó súrlódás lép fel, tehát

(7) $$S = \mu N = \mu mg\cos\alpha,$$

(8) $$a_2 = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha,$$

(9) $$\beta_2 = \frac{5\mu g\cos\alpha}{2r}$$

Vizsgáljuk most meg, hogyan mozog a golyó a feladatban adott lejtőn!
Két eset lehetséges:

a) Ha mindkét tapadási súrlódási együttható nagyobb vagy egyenlő μ_0-lal, akkor a golyó az egész lejtőn tisztán gördül. Ez elképzelhető, mivel a tapadó súrlódási együttható nagyobb a csúszónál, így lehetséges, hogy bár $\mu_2 = 0,1$, a tapadó súrlódásra $\mu_{2t} \geqq 0,165$.

Dinamikai számolás helyett alkalmazzuk most az energiamegmaradás törvényét! Súrlódási veszteség ekkor nincs, hiszen a golyó lejtővel érintkező pontjánál a golyó és a lejtő között nincs elmozdulás:

(10) $$mg(2s)\sin\alpha = (1/2)mv^2 + (1/2)\theta\omega^2 = = (1/2)mv^2 + (1/2)\cdot(2/5)mr^2v^2/r^2.$$

Innen a lejtő alján a golyó sebessége:

(11) $$v = \sqrt{(20/7)sg\sin\alpha} \approx 3,78\ \mathrm{m/s}.$$

Mivel a golyó sehol nem csúszik meg, eredményünk független a súrlódási együtthatóktól, így azok felcserélésétől is.

b) Ha azon a szakaszon, ahol $\mu_2 = 0,1$, a tapadó súrlódási együttható is kisebb μ_0-nál, akkor ezen a szakaszon a golyó megcsúszik. A felső s hosszúságú szakaszon csúszásmentes gördülés történik a_1 gyorsulással. A lejtő közepén a golyó sebessége és szögsebessége:

$$v_1 = \sqrt{2a_1 s} \approx 2,67\ \mathrm{m/s},$$
$$\omega_1 = v_1/r \approx 26,71\ 1/\mathrm{s}.$$

A lejtő második felén a golyó megcsúszik, gyorsulása (8)-ból $a_2 \approx 4,13$ m/s^2, szöggyorsulása (9)-ből $\beta_2 \approx 21,7$ 1/s^2. Legyen t_2 a lejtő közepétől a leérésig eltelt idő. Ekkor a haladó mozgásra

$$s = v_1 t_2 + (a_2/2)t_2^2,$$
$$v_2 = v_1 + a_2 t_2.$$

Ezekből az egyenletekből a leérésig elért sebesség:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2a_2 s} \approx 3,93 \text{ m/s}.$$

A második szakasz megtételéhez szükséges idő

$$t_2 \approx 0,303 \text{ s},$$

a végső szögsebesség

$$\omega_2 = \beta_2 t_2 + \omega_1 \approx 33,3 \text{ 1/s}.$$

A súrlódási munkából származó energiaveszteség a golyó lejtővel érintkező pontjának a lejtőhöz viszonyított elmozdulásával arányos. Ez az elmozdulás a lejtő második szakaszának hossza és az elfordulásból származó kerületi elmozdulás különbsége. A súrlódási munka tehát

$$W = \mu_2 mq \cos\alpha[s - (\beta_2/2)t_2^2 r - \omega_1 t_2 r] \approx 0,078 \text{ J}.$$

Eredményünk ellenőrizhető a munkatétel alapján:

$$mg(2s)\sin\alpha = (1/2)mv_2^2 + (1/2)\theta\omega_2 + W.$$

Cseréljük fel a súrlódási együtthatókat! Ekkor az első szakaszon lesz csúszva gördülés a_2 gyorsulással és β_2 szöggyorsulással. A lejtő közepén a sebesség

$$v_3 = \sqrt{2sa_2} \approx 2,88 \text{ m/s},$$

az indulástól eltelt idő

$$t_3 = \sqrt{2s/a_2} \approx 0,696 \text{ s},$$

az elért szögsebesség

$$\omega_3 \approx \beta_2 t_2 \approx 15,1 \text{ 1/s}.$$

Az alsó szakaszon ugyan teljesül $\mu_1 > \mu_0$ összefüggés, azonban $v_3 > \omega_3 r$, így a golyó egy s_4 hosszúságú szakaszon köszörülni fog. A gyorsulás és a szöggyorsulás ekkor (8)-ból és (9)-ből

$$a_4 \approx 1,54 \text{ m/s}^2, \quad \beta_4 \approx 86,6 \text{ 1/s}^2.$$

A köszörülés megszűnéséig t_4 idő telik el, ezalatt a golyó sebessége és a kerületi sebesség egyenlővé válik:

$$v_4 = a_4 t_4 + v_3 = r(\beta_4 t_4 + \omega_3).$$

Innen

$$t_4 \approx 0,192 \text{ s}, \quad v_4 \approx 3,17 \text{ m/s}, \quad s_4 = \frac{v_3 + v_4}{2} t_4 \approx 0,581 \text{ m}(< s).$$

A hátralevő $s - s_4$ hosszúságú szakaszon a_1 gyorsulással gördül a golyó, a végsebesség

$$v_5 = \sqrt{v_4^2 + 2a_1(s - s_4)} \approx 36,1 \text{ m/s},$$

kisebb, mint az előző esetben. A különbségért az s_4 szakaszon történő köszörülés a felelős. Súrlódási veszteség most az első és a második szakaszon adódik:

$$W = \mu_2 mg \cos\alpha[s - (1/2)\beta_2 t_3^2] + \mu_1 mg \cos\alpha \left(s_4 - r\frac{\omega_3 + \omega_4}{2} t_4 \right) \approx 0,869 \text{ J},$$

ami a hosszabb köszörülés miatt lényegesen több, mint az előző esetben.

Horváth Gábor (Kiskunhalas, Szilády Á. Gimn., III. o. t.)