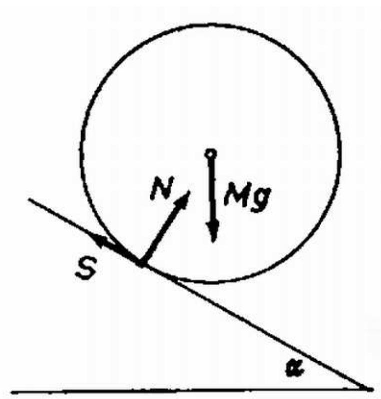
I. megoldás. Határozzuk meg először a gömbhéjnak a középpontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát! Legyen a gömbhéj külső sugara R, belső sugara r, anyagának sűrűsége ϱ.

$$\Theta_0 = \frac{2}{5}\cdot\frac{4\pi}{3}R^3\,\varrho\cdot R^2 - \frac{2}{5}\cdot\frac{4\pi}{3}r^3\,\varrho\cdot r^2 = \frac{2}{5}\,M\cdot\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}.$$

ahol $M=(4\pi/3)\,(R^3-r^3)\,\varrho$ a gömbhéj tömege. Nagyon vékony gömbhéj esetén

$$\Theta = \lim_{r\to R}\Theta_0 = \lim_{r\to R}\frac{2}{5}\,M\,\frac{(R-r)(R^4+R^3r+R^2r^2+Rr^3+r^4)}{(R-r)(R^2+Rr+r^2)} = \frac{2}{3}\,MR^2. \tag{1}$$



1. ábra

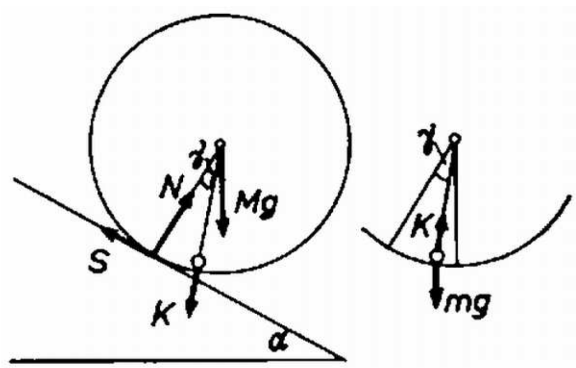
Számítsuk ki az üres gömb a_0 gyorsulását! A gömb középpontjának lejtő irányú mozgására és a tömegközéppont körüli forgásra vonatkozó egyenlet, valamint a csúszásmentes gördülést figyelembe vevő kényszerfeltétel (1. ábra):

$$Mg\,\sin\alpha - S = Ma_0, \tag{2}$$
$$SR = \Theta\beta, \tag{3}$$
$$a_0 = \beta R, \tag{4}$$

ahol β a szöggyorsulás.

Az (1)–(4) egyenletekből a gömb gyorsulása

$$a_0 = (3/5)g\,\sin\alpha. \tag{5}$$



2. ábra

Helyezzük az m tömegpontot a gömbhéj belsejébe! Ha a gömbhéj egyenletesen, lengések nélkül gyorsul, a tömegpont helyét jellemző γ szög a mozgás során nem változik (2. ábra). A tömegpont és a gömbhéj között sugár irányú K nagyságú erő hat. A tömegpont ill. a gömbhéj mozgását leíró egyenletek:

$$mg\,\sin\alpha - K\,\sin\gamma = ma, \tag{6}$$
$$Mg\,\sin\alpha + K\,\sin\gamma - S = Ma, \tag{7}$$
$$SR = \Theta\beta, \tag{8}$$
$$\alpha = \beta R, \tag{9}$$

ahonnan

$$a = \frac{M+m}{(5/3)M+m}\, g \sin\alpha. \tag{10}$$

A feladat feltétele szerint $a = 1{,}2\, a_0$, azaz

$$1{,}2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{M+m}{(5/3)M+m}. \tag{11}$$

Az egyenletet megoldva a tömegpont és a gömb tömegének aránya

$$M/m = 7/5.$$

Krähling János (Bonyhád, Petőfi S. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Tegyük fel, hogy a gömbhéj h magasságból gördül le a lejtőn. A kezdeti helyzeti energia a gömb mozgási és forgási energiájává ill. a tömegpont mozgási energiájává alakul. Üres gömbre ill., ha a tömegpont a gömb belsejében van:

$$Mgh = (1/2)Mv_0^2 + (1/2)\Theta\omega_0^2, \tag{12}$$

$$(M+m)gh = (1/2)Mv^2 + (1/2)\Theta\omega^2 + (1/2)mv^2, \tag{13}$$

ahol a tökéletes gördülés miatt $v_0 = \omega_0 R$ és $v = \omega R$. Egy l úton a gyorsulással mozgó test végsebességére a $v^2 = 2al$ összefüggés érvényes, tehát a gyorsulás arányos a sebesség négyzetével. Így a gyorsulás 20%-os növekedésére vonatkozó feltétel ekvivalens az

$$1{,}2 \cdot v_0^2 = v^2 \tag{14}$$

összefüggéssel. A (12)–(14) egyenletrendszert megoldva a tömegek aránya meghatározható,

$$M/m = 7/5.$$

Czuczor Judit (Paks, Vak Bottyán J. Gimn., III. o. t.)