

A felfelé mászó ember gyorsulása a kötélhez viszonyítva (F a kötélerő, M az ember tömege):

$$a_e = \frac{F - Mg}{M} = 0,703 \text{ m/s}^2.$$

A test gyorsulása a földhöz viszonyítva:

$$a_t = \frac{F - mg}{m} = 0,44 \text{ m/s}^2.$$

Tegyük fel, hogy a mozgás kezdetekor a test is és az ember is a földön áll. $t = 10$ s múlva a földtől mért távolságuk:

$$s_e = (1/2)(a_e - a_t)t^2, \quad s_t = (1/2)a_t t^2;$$

sebességük (a sebességek felfelé pozitívak)

$$v_e = (a_e - a_t)t, \quad v_t = a_t t$$

lesz. Behelyettesítve a numerikus adatokat

$$s_e = 13,15 \text{ m}, \quad s_t = 22 \text{ m}, \quad v_e = 2,63 \text{ m/s}, \quad v_t = 4,4 \text{ m/s}.$$

Mivel $t = 10$ s-nál az ember abbahagyja a mászást és erősen megfogja a kötelet, az ember is és a test is a v_e , ill. v_t kezdősebességeknek megfelelő függőleges hajítás szerint folytatja a mozgást addig, amíg a kötél újra meg nem feszül. Az ember pályájának holtpontja:

$$s_e + v_e^2/(2g) = 13,15 \text{ m} + 0,35 \text{ m} = 13,5 \text{ m}.$$

A test pályájának holtpontja

$$s_t + v_t^2/(2g) = 22 \text{ m} + 0,98 \text{ m} = 22,98 \text{ m}.$$

A kötél akkor feszül meg ismét, amikor a hajítások kezdőpontjaitól mért elmozdulások összege nulla. Ha ez t' idő múlva következik be, akkor

$$v_e t' - (g/2)t' + v_t t' - (g/2)t'^2 = 0,$$

amiből

$$t' = \frac{v_e + v_t}{g} = 0,716 \text{ s}.$$

A test helyzete ekkor

$$s'_t = s_t + v_t t' - (g/2)t'^2 = 22,63 \text{ m}.$$

A sebességek a t' pillanatban (még a kötél megfeszülése előtt):

$$v'_e = v_e - g t' = -4,39 \text{ m/s},$$

$$v'_t = v_t - g t' = -2,62 \text{ m/s}.$$

A kötél megfeszülésekor az ember és a test a kötél közvetítésével rugalmatlanul ütközik. Ezért

$$\bar{v}'_t = -\bar{v}'_e = \frac{m v'_t - M v'_e}{m + M} = 0,84 \text{ m/s},$$

tehát a test felfelé, az ember lefelé kezd mozogni. Az ember azonban felfelé gyorsul:

$$a'_e = +g \frac{m - M}{m + M} = +0,124 \text{ m/s}^2 = -a'_t,$$

így még mielőtt a földet elérné, felfelé kezd mozogni. A test lefelé gyorsul és t'' idő múlva éri el a talajt:

$$s'_t + \bar{v}'_t t'' - a' t''/2 = 0,$$

amiből

$$t'' = 27,04 \text{ s}.$$

Ekkor az ember

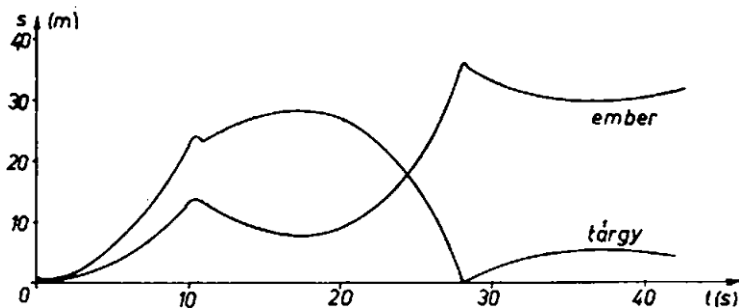
$$s_e + s_t = 35,15 \text{ m}$$

magasan van és sebessége

$$v'_e = \bar{v}'_e + a'_e t'' = 2,51 \text{ m/s}.$$

Ha ekkor a test rugalmatlanul ütközik, akkor a kötél újabb megfeszüléséig a talajon marad. Az ember további mozgását a v''_e , kezdősebességű függőleges hajítás írja le. Amikor $-v''_t$ sebességgel ismét eléri az $s_e + s_t$ magasságú pontot, a kötél ismét megfeszül, a tárgy felemelkedik, de negatív gyorsulása miatt végül újra eléri a talajt. Ez a mozgás fog ismétlődni, de úgy, hogy az ember függőleges hajítási kezdősebessége mindig csökken. Mivel a test mindig a talajról indul és oda is érkezik, az n -edik lépésben az ember függőleges hajítási sebessége

$$V^{(n)} = \frac{M}{m + m} v^{(n-1)}.$$



Az n -edik függőleges hajításához

$$t^{(n)} = \frac{2v^{(n)}}{g}$$

idő kell, amikor a kötel feszés, a mozgás

$$\bar{t}^{(n)} = \frac{2v^{(n+1)}}{a}$$

időt vesz igénybe. Az egész mozgás

$$T = t + t' + t'' + \sum_{n=0}^{\infty} (t^{(n)} + \bar{t}^{(n)})$$

ideig tart. Számadatokkal:

$$\begin{aligned} T &= 10 \text{ s} + 0,716 \text{ s} + 27,04 \text{ s} + 2v_e'' \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{g} \left(\frac{M}{m+M} \right)^n + \frac{1}{a_e'} \left(\frac{M}{m+M} \right)^{n+1} \right] = \\ &= 37,75 \text{ s} + \frac{2v_e''}{g} \frac{1}{1 - \frac{M}{m+M}} + \frac{\frac{2v_e''}{a_e'} \cdot \frac{M}{m+M}}{1 - \frac{M}{m+M}} = 78,23 \text{ s}, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, ha $|q| < 1$.

A végső helyzetben a test a földön, az ember 35,15 m magasan lesz.

Seregdy Tamás (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján