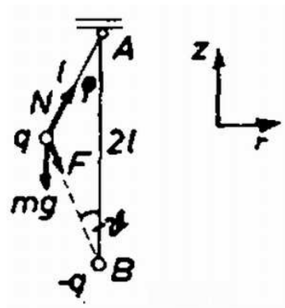
A feladat egy olyan kúpingára vonatkozik (l. az 1552. feladat KML 59 [1979] 227. o.), amelyre a nehézségi erőn kívül még a töltések vonzásból eredő erő is hat.

Írjuk fel a II. Newton-axióma alapján az m tömegi test mozgásegyenletét. Az 1. ábra jelöléseivel az egyenlet r és z komponensei (a_c-vel a centripetális gyorsulást jelöljük):



1. ábra

$$N\sin\varphi + F\sin\vartheta = ma_c, \tag{1}$$

$$N\cos\varphi - F\cos\vartheta - mg = 0. \tag{2}$$

Kifejezhetjük ϑ szögfüggvényeit φ-vel:

$$\cos\vartheta = \frac{2-\cos\varphi}{\sqrt{5-4\cos\varphi}}, \quad \sin\vartheta = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{5-4\cos\varphi}}.$$

A Coulomb-törvény szerint

$$F = k\frac{q^2}{l^2(5-4\cos\ \varphi}.$$

Ezek felhasználásával (1)-ből N-t kifejezzük, és behelyettesítjük (2)-be:

$$ma_c = \operatorname{tg}\varphi\left[mg + k\frac{q^2(2-\cos\varphi)}{l^2(5-4\cos\varphi)^{3/2}}\right] + k\frac{q^2\sin\varphi}{l^2(5-4\cos\varphi)^{3/2}}.$$

A centeripetális gyorsulást ismerjük:

$$a_c = \omega^2 l\sin\varphi,$$

ezt az egyeletbe behelyettesítve átrendezés után

$$\omega^2 = \frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{g}{l} + \frac{2kq^2}{(5-4\cos\varphi)^{3/2}}\right] \tag{3}$$

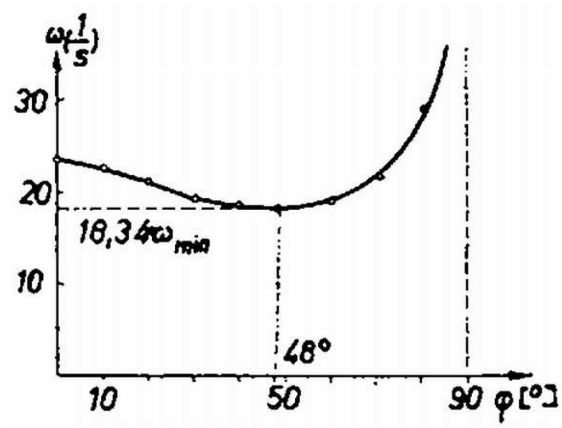
adódik.

Az $m = 10^{-4}$ kg, $l = 0{,}1$ m, $q = 5\cdot 10^{-8}$C, $\varphi = 30°$ és $k = 9\cdot 10^9$ Vm/C értékekkel:

$$\omega = 19{,}65/\mathrm{s}.$$

A keringési idő $T = 2\pi/\omega = 0{,}32$ s.

A legkisebb ω értéket a $\mathrm{d}(\omega^2)/\mathrm{d}\varphi = 0$ egyenlet felhasználásával kaphatnánk. Így magasabb fokú egyenletet kapunk, ezért annak egzakt megoldása helyett a minimumot numerikusan keressük.



2. ábra

Az egyes $\omega(\varphi)$ értékeket a következő táblázat rögzíti, a görbe menetét a 2. ábrán láthatjuk.

φ (°)	0	10	20	30	40	45	46	47	48	49	50	60	70	80	90
ω (1/s)	23,41	22,76	21,23	19,66	18,61	18,37	18,35	18,35	18,34	18,35	18,37	19,22	21,84	29,24	–

Így azt kapjuk, hogy a legkisebb szögsebesség $\omega_{\min} = 18{,}34$ 1/s, a hozzá tartozó szög $\varphi_0 \approx 48°$.

Borbély Gábor (Kapuvár, Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A valóságban rögzített φ-nél az erőtörvényekből és a mozgásegyenletből számolt szögsebességgel nem mindig jön létre körmozgás, meg kell vizsgálni a pályamozgás stabilitását. Ha $q = 0$, akkor nyilvánvalónak tűnik a stabilitás. Kicsiny sugárirányú lökést adunk a golyónak, akkor ez az impulzusmomentum megmaradása miatt nagyobb szögsebességgel indul el egy olyan beljebb levő pályán, amelyhez még az előző szögsebességénél is kisebb ω tartozik, ezért a golyó visszatér az eredeti pályája felé. $q \neq 0$ esetén részletesebben meg kell vizsgálnunk a kérdést.

A kis $\Delta\varphi$ elmozdulásokkal szembeni stabilitás feltételét keressük. Az impulzusmomentum z komponense megmaradó mennyiség:

$$ml^2\omega(\varphi)\sin^2\ \varphi = \text{állandó}.$$

Ezt az összefüggést a szorzat deriválási szabálya alapján φ szerint deriválva kapjuk:

$$ml^2[\omega(\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\varphi)\sin^2\varphi + \omega\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi] = 0,$$

ebből

$$\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\varphi = -2\omega\,\mathrm{ctg}\,\varphi.$$

Tehát a kicsiny $\Delta\varphi$ kimozdulás esetén a test szögsebességének változása

$$\Delta\omega \approx -(2\omega\,\mathrm{ctg}\,\varphi)\Delta\varphi.$$

A körmozgás stabil a $\Delta\varphi$ elfordulással szemben, ha a $\varphi + \Delta\varphi$ pályához tartozó szögsebesség (ezt a (3) kifejezéssel számíthatjuk ki) $\Delta\varphi > 0$ esetén nagyobb, mint $\omega + \Delta\omega$ (az a szögsebesség, amelyet a test a kimozdulás során felvesz). Ekkor ugyanis kisebb szögsebességgel indulna el egy nagyobb szögsebességhez tartozó pályán, így a Coulomb- és a kötélerő visszahúzná. Ugyanígy az is szükséges, hogy egy $\Delta\varphi < 0$ elmozdulásra $\omega + \Delta\omega$ nagyobb legyen, mint amekkora szögsebességet a centripetális erő biztosítani tud, ekkor ugyanis a test visszalendül az eredeti helyzete felé. A stabilitás feltétele tehát az, hogy az $\omega(\varphi)$ görbe meredeksége mindig nagyobb legyen, mint $-\,2\omega\mathrm{ctg}\,\varphi$.

A (3)-ból adódó $\omega(\varphi)$ függvény legkisebb meredeksége közelítőleg
$(1/10°)[\varphi(40°) - \varphi(30°)] = -0{,}1$ 1/°s, ez jóval nagyobb, mint $-\,2\omega\,\mathrm{ctg}\,\varphi$ értéke, pl. ha $0 \le \varphi \le 89°$, 90° közelében viszont $\omega(\varphi)$ meredeksége pozitív, míg $-\,2\omega\,\mathrm{ctg}\,\varphi$ negatív.

A stabilitás feltétele tehát teljesül minden helyzetben.

2. Az (1)-(2) egyenletrendszer csak akkor határozza meg a mozgást, ha a q töltés gyorsulásából eredő sugárzási veszteség elhanyagolható, vagyis amíg a frekvencia elegendően kicsi.