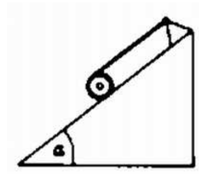
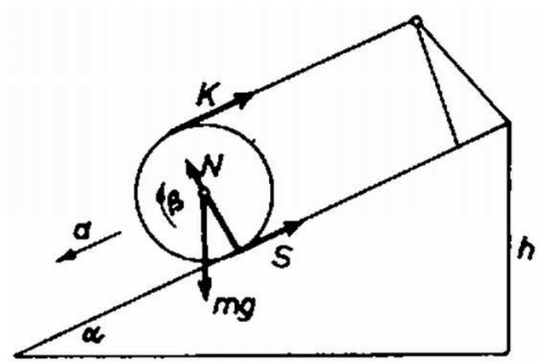


I. megoldás. Bontsuk fel a korong mozgását tömegközéppontjának haladó mozgására és a tömegközéppont körüli forgásra! A korongra az ábrán látható erők hatnak, tegyük fel, hogy a fonalat a lejtővel párhuzamos helyzetben rögzítettük. A korong tömege legyen m, sugara r, a tömegközéppontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = (1/2)mr^2$. A korong lejtővel párhuzamos mozgására tehát

(1) $$ma = mg\sin\alpha - K - S;$$

a lejtőre merőlegesen a korong nem gyorsul, így

(2) $$N = mg\cos\alpha.$$



A korong forgó mozgására vonatkozó egyenlet:

(3) $$\Theta\beta = Kr - Sr.$$

ahol β a szöggyorsulás. A korong a nyújthatatlan fonálról gördül le, így szöggyorsulása és tömegközéppontjának gyorsulása között fennáll a

(4) $$\beta r = a$$

kényszerfeltétel. Ha a korong megmozdul, közte és a lejtő között csúszó súrlódás lép fel, így

(5) $$S = \mu N.$$

Az (1)-(5) egyenletekből álló egyenletrendszerből a korong gyorsulása kifejezhető:

(6) $$a = (2/3)g(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha).$$

A korong gyorsulása nem lehet negatív, tehát $\sin\alpha \geq 2\mu\cos\alpha$. A korong akkor gyorsul, ha

(7) $$\mu < (1/2)\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Egyenlőség esetén a meglökött korong állandó sebességgel mozog míg $\mu > (1/2)\mu\mathrm{tg}\ \alpha$ esetén a korong meglökés után is megáll.

Böszörményi Zoltán (Dunaújváros, Münnich F. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. A korong mozgása bármely pillanatban tekinthető úgy, mint a fonál elválási pontja körül történő forgás. Erre a pontra vonatkozóan a korog tehetetlenségi nyomatéka a Steiner-tétel alapján

(8) $$\Theta' = \Theta + mr^2 = (3/2)mr^2.$$

A pillanatnyi forgástengely körüli elfordulásra vonatkozó egyenlet:

(9) $$\Theta'\beta = rmg\sin\alpha - 2rS.$$

Ezt az egyenletet az (1) és (3) egyenlet helyére írva az egyenletrendszer megoldható, hiszen eggyel kevesebb egyenletünk van, de a K ismeretlen erő az egyenletekben nem szerepel. Az egyenletrendszer megoldása megegyezik az I. megoldásban kapott megoldással.

Mármarosi József (Kisbér, Táncsics M. Gimn., III. o. t.)

III. megoldás. Oldjuk meg a feladatot a munkatétel segítségével! Tegyük fel, hogy az elindulás után a korong középpontja Δh-val lejjebb kerül, ekkor helyzeti energiájának csökkenése $mg\Delta h$. Ez az energiaváltozás mozgási és forgási energiát, valamint súrlódási munkát fedez. A súrlódási erő $S=\mu N=\mu mg\cos\alpha$. A korong középpontja $\Delta h/\sin\alpha$ úton mozdul el, a lejtővel érintkező pontjának elmozdulása azonban ennek kétszerese, mivel a korong forog is, és $v=\omega r$. A munkatétel:

$$mg\Delta h=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\Theta\omega^2+2\mu mg\cos\alpha\frac{\Delta h}{\sin\alpha}. \tag{10}$$

$\Theta=(1/2)mr^2$ és $\omega=v/r$ értékeket beírva v^2 kifejezhető:

$$v^2=\frac{4}{3}g\Delta h-\frac{8}{3}\mu\cos\alpha\frac{\Delta h}{\sin\alpha}. \tag{11}$$

Az egyenletesen gyorsuló mozgás esetén $v^2=2as$, v^2 az elmozdulással arányos. Másrészt belátható, hogy ha egy mozgás olyan, hogy v^2 az elmozdulással arányos, akkor a gyorsulás állandó. (11)-ben v^2 valóban az elmozdulással arányos, így a mozgás egyenletesen gyorsuló. Az elmozdulás $\dfrac{\Delta h}{\sin\alpha}$, így

$$a=\frac{v^2}{2s}=\frac{v^2\sin\alpha}{2\Delta h}=\frac{2}{3}g(\sin\alpha-2\mu\cos\alpha). \tag{12}$$

Pulai Sándor (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., III. o. t.)