

A $0\text{ }^\circ\text{C}$ -os vizet a $100\text{ }^\circ\text{C}$ -os víz lehülése árán kell felmelegítenünk; minél jobban lehül az eredetileg $100\text{ }^\circ\text{C}$ -os víz, annál melegebb lesz a $0\text{ }^\circ\text{C}$ -os víz a folyamat végén. Az a célunk, hogy a $100\text{ }^\circ\text{C}$ -os víz minél jobban lehüljön, de mindig szem előtt kell tartani, hogy a hőáram iránya egyértelműen meghatározott; a melegebb test ad át hőt a hidegebb testnek.

Ha a $100\text{ }^\circ\text{C}$ -os víznek csak egy igen kis részét hozzuk hőkontaktusba a $0\text{ }^\circ\text{C}$ -os vízzel, akkor az igen erősen lehül, és így a melegítés szempontjából a hasznosítása nagyon jó. Úgy érdemes próbálkozni, hogy a meleg vizet kis részekre osztjuk és az egyes részekkel külön-külön melegítjük a hidegebb vizet.

Osszuk fel a $100\text{ }^\circ\text{C}$ -os vizet n egyenlő részre. Kössük az első részt egy igen jó, veszteségmentes hővezetővel a $0\text{ }^\circ\text{C}$ -os vízhez. A T_1 egyensúlyi hőmérséklet a

$$cm(T_1 - T_0) = c(m/n)(100\text{ }^\circ\text{C} - T_1)$$

egyenletből ($m = 1\text{ kg}$, $T_0 = 0\text{ }^\circ\text{C}$, c pedig a víz fajhője) határozható meg:

$$T_1 = 100\text{ }^\circ\text{C}/(n + 1).$$

Ha n elég nagy, akkor T_1 elég kicsi, a $100\text{ }^\circ\text{C}$ -os víz a hőcsere során jól lehül, azaz igen jól hasznosítottuk.

Kapcsoljuk ezután a jó hővezetőnkkel a T_1 hőmérsékletű vizet a második adag $100\text{ }^\circ\text{C}$ -os vízhez. Az egyensúlyi hőmérséklet T_2 :

$$T_2 = \frac{100\text{ }^\circ\text{C}}{n + 1} + \frac{n \cdot 100\text{ }^\circ\text{C}}{(n + 1)^2}.$$

$T_2 > T_1$, tehát a második adag $100\text{ }^\circ\text{C}$ -os vizünk már kevésbé hűlt le, mint az első, és így kevésbé hasznosítottuk a melegítésnél. Érdemes még felírni a közös hőmérsékletet a harmadik adaggal való melegítés után:

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{100\text{ }^\circ\text{C}}{n + 1} + \frac{n}{n + 1}T_2 = \frac{100\text{ }^\circ\text{C}}{n + 1} + \frac{n}{n + 1} \cdot \frac{100\text{ }^\circ\text{C}}{n + 1} + \frac{n^2 \cdot 100\text{ }^\circ\text{C}}{(n + 1)^3} = \\ &= \frac{100}{n + 1} \left(1 + \frac{n}{n + 1} + \frac{n^2}{(n + 1)^2} \right) \text{ }^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Jól láthatóan egy mértani sor összege határozza meg a kialakuló közös hőmérsékletet, ezért a végső hőmérséklet

$$T_n = \frac{100\text{ }^\circ\text{C}}{n + 1} \cdot \left[\frac{\left(\frac{n}{n + 1} \right)^n - 1}{\frac{n}{n + 1} - 1} \right] = 100\text{ }^\circ\text{C} \left[1 - \left(\frac{n}{n + 1} \right)^n \right].$$

$\left[\frac{n}{n + 1} \right]^n$ egy nevezetes kifejezés reciproka, ami $n \rightarrow \infty$ esetén a természetes logaritmus alapszámához, $e \approx 2,72$ -hoz tart. Ha tehát a $100\text{ }^\circ\text{C}$ -os vizet igen sok részre osztjuk fel, akkor a fenti eljárással az eredetileg $0\text{ }^\circ\text{C}$ -os vizet $T \approx 63,2\text{ }^\circ\text{C}$ -ra tudjuk felmelegíteni.