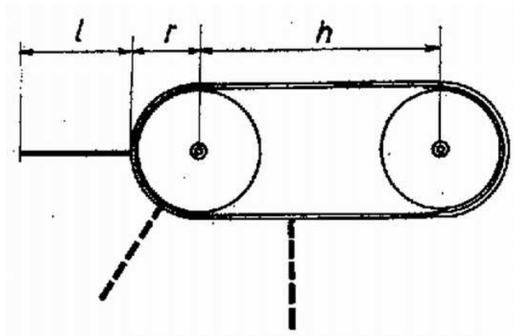
A feladatot az energiamegmaradás törvényének felhasználásával fogjuk megoldani. Vizsgáljuk először a mozgás kezdeti szakaszát!



A rúd helyzeti energiája

$$E_h = -\big[(l/2) - r\big]\, mg \sin\alpha,$$

ahol α a rúd vízszintessel bezárt szöge, amely a szalag x elmozdulásával $\alpha = x/r$ alakban fejezhető ki. Ha a szalag sebessége v, akkor a rúd tömegközéppontja $v' = v\big[(l/2) + r\big]/r$ sebességgel mozog, a rúd szögsebessége pedig $\omega = v/r$. A mozgási energia tehát

$$E_k = (1/2)mv'^2 + (1/2)\Theta\omega^2 = (1/2)mv^2\big[1 + (l/r) + (1/3)l^2/r^2\big].$$

A behelyettesítésnél felhasználtuk, hogy a pálca tömegközéppontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = (1/12)ml^2$. Az energiamegmaradás törvénye szerint

$$(1/2)mv^2\big[1 + (l/r) + (1/3)l^2/r^2\big] - \big[(l/2) + r\big]\, mg \sin\alpha = 0.$$

Ebből a sebesség

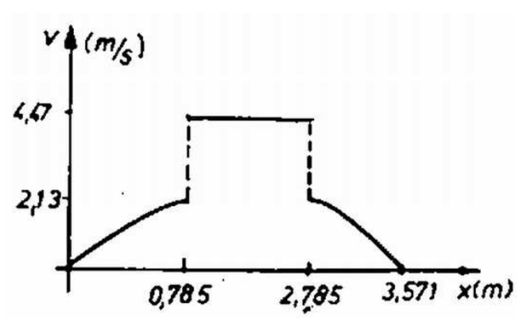
$$v = \sqrt{\frac{l + 2r}{1 + (l/r) + (1/3)l^2/r^2} \cdot g \cdot \sin\frac{x}{r}} = \sqrt{(6/13)lg\sin(x/r)}.$$

A fenti számítás azonban csak addig igaz, amíg a szalag elmozdulása $x \le (\pi/2)\cdot r$. Ha egy későbbi pillanatot vizsgálunk, akkor azt látjuk, hogy a pálca csak haladó mozgást végez, tömegközéppontjának sebessége megegyezik a szalag sebességével és helyzeti energiája állandó:

$$E_h = -\big[(l/2) + r\big]\, mg.$$

Ekkor tehát a sebesség

$$v = \sqrt{2g\big[(l/2) + r\big]}.$$



A fentiek alapján és a számértékeket behelyettesítve az ábrán látható periodikus függvényt kapjuk. Az ábra szerint a sebesség az $x = (\pi/2)\cdot r$, $x = (\pi/2)\cdot(r + h)$ stb. pontokban ugrásszerűen változik.

A feladatot az adott feltételek mellett megoldottuk, de az ugrásszerű sebességváltozás további vizsgálatot kíván. Ha ugyanis a szalag bármelyik részére felírjuk Newton II. törvényét ($F = ma$), akkor nyilvánvaló, hogy véges erőhatások csak véges gyorsulást hozhatnak létre, tehát ugrásszerű sebességváltozás nem létezhet. További probléma, hogy az említett pontokban a bot szöggyorsulása is végtelen nagynak adódik, ami már a feladat feltételei mellett is lehetetlen. (Ha a szalag tömege elhanyagolhatóan kicsi, akkor gyorsulása elvileg tetszőlegesen nagy lehet, de a bot tehetetlenségi nyomatéka adott érték, és ehhez véges szöggyorsulásnak kell tartoznia.)

A választ az átmeneti tartomány részletes elemzése adja meg. Amikor a bot elhagyja az $\alpha = \pi/2$-vel jellemzett pontot, szögsebessége nem csökken rögtön nullára, és a bot közepe kicsit előre siet az elméleti helyzethez képest. Eközben a ragasztás vagy az acélszalag (esetleg maga a bot) deformálódik. A deformáció hatására olyan erők ébrednek, amelyeknek forgatónyomatéka visszaállítja a bot szalagra merőleges helyzetét, és amikor ez bekövetkezik (véges idő múlva), akkor lesz ismét érvényes az ábrán rajzolt függvény. Az átmeneti tartomány szélessége csökkenthető. ha erősebb ragasztót és feszesebb szalagot használunk, de a sebesség mindenképpen folytonos függvénye lesz a helynek.

Sass Béla (Jászberény, Lehel Vezér Gimn., IV. o. t.)