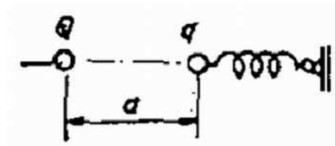
A golyó teljes energiája az elektrosztatikus és a rugalmas helyzeti energia és a mozgási energia összege:

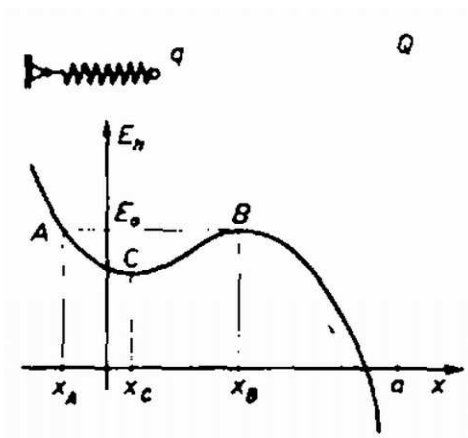
(1)
$$E = E_h + E_m = k\frac{qQ}{a-x} + \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

(Q és q ellentétes előjelű, így $qQ < 0$.)



Ábrázoljuk vázlatosan a helyzeti energiát a golyó helyzete függvényében! A golyó a helyi minimum környezetében végezhet rezgéseket. Adott E teljes energia esetén a rezgés azon a szakaszon történhet, ahol $E_h \leq E$, tehát a mozgási energiára nemnegatív érték adódik. A legnagyobb amplitúdójú rezgés szélső pontjai A és B, a teljes energia ekkor a helyzeti energia helyi maximumának E_0 értékével egyenlő.

1. Vizsgáljuk meg először, hogy a paraméterek milyen választása mellett jöhet létre egyáltalán rezgés! A golyóra ható erő két pontban, a helyzeti energia maximumánál (B) és az egyensúlyi helyzetben (C) nullával egyenlő (l. az ábrát).



(2)
$$F = -\frac{\mathrm{d}E_h}{\mathrm{d}x} = -\frac{kqQ}{(a-x)^2} - Dx = 0,$$

ahonnan

(3)
$$Dx(a-x)^2 + kqQ = 0,$$

(3′)
$$Dx^3 - 2Dax^2 + Da^2x + kqQ = 0.$$

Ha D-t csökkentjük, a helyzeti energiát egyre inkább az elektrosztatikus energia határozza meg, kis D-k esetén ($D \leq D_0$) a minimum eltűnik. Határesetben a (3) egyenlet a B és C ponthoz tartozó megoldása egybeesik, tehát a hozzátartozó gyöktényező az egyenlet gyöktényezős alakjában kétszer fordul elő! Ennek következtében ez a gyök a bal oldal deriváltjának is gyöke:

(4)
$$3Dx^2 - 4Dax + Da^2 = 0.$$

Ez az egyenlet már csak másodfokú, a fizikailag lényeges gyöke $a/3$. (A második gyök a.) Ha tehát D egy értéke mellett B és C egy pontba esik, ez a pont $x = a/3$-nál van. A (3) egyenletbe helyettesítve D_0 meghatározható:

(5)
$$D_0 = -\frac{27}{4} \cdot \frac{kqQ}{a^3}.$$

Rezgés csak akkor jöhet létre, ha $D > D_0$.

A további számítások során harmadfokú egyenletek megoldására lesz szükség. Ez ugyan általános esetben is megtehető, azonban az összefüggések annyira bonyolulttá válnak, hogy taglalásuk gyakorlatilag lehetetlen. Ezért ezután csak azzal a speciális esettel foglalkozunk, amikor $D = 2D_0$.

2. Határozzuk meg a maximális amplitúdójú rezgés nyugalmi helyzetét és szélső pontjait! A B és C pontban a golyóra ható erők eredője nulla. A (3) egyenletben D helyére $2D_0$-at helyettesítve és az $x = y + (2a/3)$ új ismeretlent bevezetve

$$y^3 - (a^2/3)y = 0. \tag{6}$$

Az egyenlet három gyöke közül $y_B = 0$, $x_B = 2a/3$ a Q töltéshez közeli szélső pontot határozza meg. $y = a\,(\sqrt{3}/3)$ esetén $x > a$, ez fizikailag értelmetlen gyök. $y_C = -a\,(\sqrt{3}/3)$, $x_C = a\,(2-\sqrt{3})/3$ a rezgés nyugalmi helyzetét adja.

A rezgés teljes energiájára x_B-t (1)-be helyettesítve $E_0 = 0$ adódik. $E > 0$ esetén a golyó a Q töltésbe zuhan, $E(x_C) < E \le E_0 = 0$ esetén rezgés alakul ki. A helyzeti energia a másik szélső helyzetben is $E_0 = 0$, így (1)-ből x_A-ra harmadfokú egyenlet adódik. Ennek az egyenletnek x_B is (kétszeres) gyöke, így x_B gyöktényezőjével osztva az egyenlet fokszáma redukálható és x_A könnyen meghatározható, $x_A = -a/3$.

A rezgés teljes amplitúdója tehát $x_B - x_A = a$, nyugalmi helyzete $x_C = a(2-\sqrt{3})/3$.

A legnagyobb energiájú „rezgés” tehát tulajdonképpen nem rezgés, mivel a B pontban levő labilis egyensúlyi helyzetet a golyó egyre csökkenő sebességgel végtelen hosszú idő alatt éri el. E_0-nál akármilyen kis értékkel kisebb energiák esetén a rezgésidő természetesen véges.

3. Érdemes meghatározni a nagyon kis amplitúdójú rezgések rezgésidejét. A mozgás ekkor jó közelítéssel harmonikus rezgőmozgásnak tekinthető. Ugyanis az y kitérést x_C-től számítva a visszatérítő erő (2) alapján:

$$F = -\frac{kqQ}{(a-y-x_C)^2} - D(y+x_C) = -\frac{kqQ}{\left[(a-x_C)-y\right]^2} - D(y+x_C) \approx$$

$$\approx -\frac{kqQ}{(a-x_C)^2 - 2(a-x_C)y} - D(y+x_C) = -\frac{kqQ}{(a-x_C)^2}\left[\frac{1}{1-\dfrac{2y}{a-x_C}}\right] - D(y+x_C) \approx$$

$$\approx -\frac{kqQ}{(a-x_C)^2}\left(1+\frac{2y}{a-x_C}\right) - D(y+x_C) = -\frac{kqQ}{(a-x_C)^2} - Dx_C - \left[\frac{2kqQ}{(a-x_C)^3} + D\right]y.$$

Az első két tag összege (2) alapján 0, hiszen x_C az egyensúlyi helyzet. Így a visszatérítő erő közelítőleg y-nal arányos, az arányossági tényező

$$D^* = D + \frac{2kqQ}{(a-x_C)^3},$$

a $D = 2D_0$ speciális esetben

$$D^* = \frac{2kqQ}{a^3}\left(\frac{3}{1+\sqrt{3}}\right)^3 + D = -\frac{27kqQ}{2a^3}(6-3\sqrt{3}).$$

A kis amplitúdójú rezgések rezgésideje tehát

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D^*}}.$$