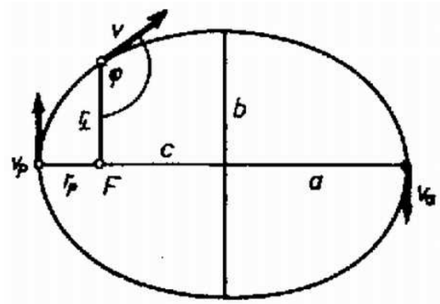
A földközeli ponthoz tartozó vezérsugár (r_p) és a rá merőleges vezérsugár ($r_\perp$) hosszának ismeretében egyszerű geometriai összefüggések segítségével meg lehet határozni a műhold ellipszispályájának paramétereit.



1. ábra

Az 1. ábra alapján a fél nagytengely:

$$a = c + r_p, \tag{1}$$

ahol

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \tag{2}$$

(b a fél kistengely). A $(c; r_\perp)$ koordinátájú pont rajta van az ellipszisen, így az ellipszis egyenletét felhasználva:

$$(c^2/a^2) + (r_\perp^2/b^2) = 1. \tag{3}$$

Az (1)–(3) egyenletekből a pálya paraméterei:

$$a = \frac{r_p^2}{2r_p - r_\perp} = 36 \cdot 10^6\ \text{m}; \qquad c = \frac{r_p(r_\perp - r_p)}{2r_p - r_\perp} = 18 \cdot 10^6\ \text{m};$$
$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = 31{,}18 \cdot 10^6\ \text{m}. \tag{4}$$

A műhold energiája a keringés során

$$E = -f(Mm/r) + (1/2)mv^2, \tag{5}$$

ahol f a gravitációs állandó, M és m a Föld, illetve a műhold tömege, r a Földtől mért távolság, v a műhold sebessége. Centrális erőtérben történő mozgásnál a másik mozgásállandó az ún. területi sebesség (a vezérsugár által időegység alatt súrolt terület):

$$v_t = (1/2) r v \sin\varphi, \tag{6}$$

ahol φ a vezérsugár és a sebességvektor által bezárt szög.

Alkalmazzuk a fenti megmaradási tételeket a földközeli ($r_p = a - c$) és a földtávoli ($r_a = a + c$) pontokra, felhasználva, hogy ezekben a helyzetekben $\varphi = 90°$!

$$E = -f(Mm/r_p) + (1/2)mvc_p^2 = -f(Mm/r_a) + (1/2)mv_a^2, \tag{7}$$

$$v_t = (1/2) r_p v_p = (1/2) r_a v_a. \tag{8}$$

A (7) és (8) egyenleteket megoldva a megmaradó mennyiségekre, az összenergia:

$$E = -f\frac{Mm}{r_a + r_p} = -f\frac{Mm}{2a}, \tag{9}$$

a területi sebesség:

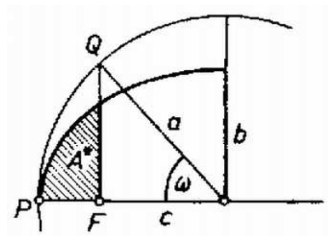
$$v_t^2 = -[E/(2m)] r_a r_p = [b^2/(4a)] fM. \tag{10}$$

A kérdezett helyzetben (5) és (9) alapján a műhold sebessége:

$$v = \sqrt{fM[(2/r_\perp) - (1/a)]} = 4{,}3\ \text{km}/s, \tag{11}$$

míg a sebesség és a vezérsugár által bezárt szög (6) és (10) alapján:

$$180° - \varphi = \text{arc sin}\,\frac{2v_t}{r_\perp v} = \text{arc sin}\,\frac{b}{\sqrt{2ar_\perp - r_\perp^2}} = 63°27'. \tag{12}$$



2. ábra

A területi sebesség ismeretében a perigeum és a kérdezett helyzet közt eltelt időt a vezérsugár által súrolt terület kiszámításával határozhatjuk meg. A 2. ábrán az ellipszist egy a sugarú körből származtattuk (b/a) affinitással. Mivel $\cos\omega = c/a = 1/2$ és így $\omega = 2\pi/6$, a PFQ körszelet területe:

$$A = a^2\pi\frac{\omega}{2\pi} - \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = a^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) . \tag{13}$$

A vezérsugár által súrolt terület:

$$A^* = A(b/a) = ab[(\pi/6) - (\sqrt{3}/8)], \tag{14}$$

és az eltelt idő:

$$t = \frac{A^*}{v_t} = 2\sqrt{\frac{a^3}{fM}}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = 110 \text{ perc.} \tag{15}$$

Pelle Judit (Eger, Szilágyi E. Gimn., III. o. t.)