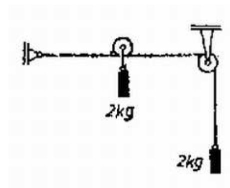
Írjuk fel az egyes testek mozgásegyenletét és a kényszerfeltételt.



A függőleges fonálon lógó testre

(1) $$K - mg = ma_1,$$

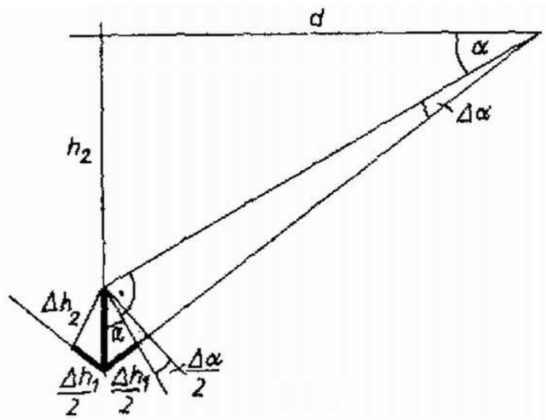
a mozgó csigán levőre pedig

(2) $$mg - 2K \cdot \sin\ \alpha = ma_2.$$

(A gyorsulásokat – és később a sebességeket is – akkor vettük pozitívnak, ha azok az 1. ábrán bejelölt irányokba mutatnak.)

Nézzük meg a testek helyzetének a megváltozását egy kis Δt időköz alatt! Mozduljon el az 1-es test Δh_1-gyel felfelé, eközben süllyedjen a 2-es test Δh_2-vel és az α szög növekedjen $\Delta\alpha$-val!

1. ábra



2. ábra

A 2. ábráról leolvasható, hogy

$$\Delta h_1/2 = \Delta h_2 \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha) - \Delta h_2 \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\,(\Delta\alpha/2). \tag{3}$$

Mivel

$$\begin{aligned} \Delta h_1 &\cong v_1 \Delta t \\ \Delta h_2 &\cong v_2 \Delta t, \end{aligned} \tag{4}$$

ahol v_1 és v_2 a pillanatnyi sebességek,

$$(1/2)v_1 \cong v_2 \sin(\alpha + \Delta\alpha) - v_2 \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\,(\Delta\alpha/2). \tag{5}$$

(4) és így (5) is annál pontosabb, minél kisebbre választjuk Δt-t. Ezért Δt-t egyre kisebbnek választva az (5) közelítő egyenlőség végül is a pillanatnyi sebességek között fennálló

$$(1/2)v_1 = v_2 \sin\alpha \tag{6}$$

pontos egyenlőségbe megy át.

Nézzük meg, milyen feltétel következik (6)-ból a gyorsulásokra! Az előző gondolatmenetünket alkalmazva most a sebességek kis $\Delta t'$ idő alatti megváltozását vizsgáljuk. $\Delta t'$ elteltével (6) szerint a sebességek az

$$(1/2)(v_1 + \Delta v_1) = (v_2 + \Delta v_2) \sin(\alpha + \Delta\alpha') \tag{7}$$

egyenlőséget elégítik ki. Vonjuk ki ebből (6)-ot:

$$\begin{aligned} (1/2)\Delta v_1 &= \Delta v_2 \sin(\alpha + \Delta\alpha') + v_2 \big[\sin(\alpha + \Delta\alpha') - \sin\ \alpha\big] = \\ &= \Delta v_2 \sin(\alpha + \Delta\alpha') + v_2 \cos\alpha \sin\Delta\alpha' + v_2 \sin\alpha(\cos\Delta\alpha' - 1). \end{aligned} \tag{8}$$

Felhasználva, hogy

$$\begin{aligned} \Delta v_1 &\cong a_1 \Delta t', \\ \Delta v_2 &\cong a_2 \Delta t', \end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{1}{2} a_1 \cong a_2 \sin(\alpha + \Delta\alpha') + v_2 \cos\alpha \frac{\sin\Delta\alpha'}{\Delta t'} - v_2 \sin\alpha \frac{1 - \cos\Delta\alpha'}{\Delta t'}. \tag{10}$$

A 2. ábráról leolvasható, hogy $\Delta t'$ idő alatt ($\Delta\alpha'$ szögváltozás esetén) a 2-es test

$$\Delta h_2 = d\big[\mathrm{tg}\,(\alpha + \Delta\alpha') - \mathrm{tg}\,\alpha\big] = d \frac{\sin\Delta\alpha'}{\cos(\alpha + \Delta\alpha')\cos\alpha} \tag{11}$$

távolságot ereszkedik, amely most

$$\Delta h_2 \cong v_2 \Delta t'\text{-vel} \tag{12}$$

helyettesíthető. (11) és (12) összevetéséből

$$\frac{\sin\Delta\alpha'}{\Delta t'} \cong \frac{v_2}{d} \cos(\alpha + \Delta\alpha')\cos\alpha \tag{13}$$

adódik. Ugyanakkor

$$\frac{1-\cos\Delta\alpha'}{\Delta t'} \cong \frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{v_2\cos(\Delta\alpha'+\alpha)\cos\alpha}{d}\cdot\Delta t'\right)^2}}{\Delta t'}, \tag{14}$$

amely az elég kicsiny x-ekre használható

$$\sqrt{1-x^2} = 1-(1/2)x^2 \tag{15}$$

közelítés segítségével (mindkét oldalt négyzetre emelve láthatjuk, hogy az eltérés $(1/4)x^4$, ami annál kisebb, minél kisebb az x és még a kicsiny $(1/2)x^2$-nél is gyorsabban közeledik 0-hoz, ha x közeledik 0-hoz) az

$$\frac{1-\cos\Delta\alpha'}{\Delta t'} \cong \frac{1}{2}\left(\frac{v_2\cos(\alpha+\Delta\alpha')\cos\alpha}{d}\right)^2\Delta t' \tag{16}$$

alakra hozható. (16)-ot és (13)-at behelyettesítjük (10)-be és felhasználjuk, hogy a (9), (12) és (15) egyenletek annál pontosabbak, minél kisebbre választjuk a $\Delta t'$-t. Így végül azt kapjuk, hogy a gyorsulások között az

$$(1/2)a_1 = a_2\sin\alpha + (v_2^2/d)\cos^3\alpha \tag{17}$$

összefüggésnek kell fennállnia. (Megjegyezzük, hogy (17) nem független (6)-tól, hisz abból származtattuk, és végül is mindkettő ugyanazt a tényt, a kötél nyújthatatlanságát fejezi ki.)

(17)-ből kiolvasható, hogy a_1 és a_2 semmilyen $0° < \alpha < 90°$ értékre nem lehet *egyszerre* nulla, hacsak nem $v_2 = 0$. Vizsgáljuk tehát a sebességeket! Ehhez legcélszerűbb az energiamegmaradás tételét használni. Ha a rendszert $\alpha = 0$-ból kezdősebesség nélkül indítjuk, a testek helyzeti energiája

$$\Delta E_h = mg(h_2-h_1) = mgd\left[\operatorname{tg}\alpha - 2\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)\right] \tag{18}$$

értékkel csökken, a mozgási energia pedig

$$\Delta E_{\mathrm{mozg}} = (1/2)m(v_1^2+v_2^2) \tag{19}$$

értékkel nő, mialatt a kötél vízszintessel bezárt szöge $0°$-ról α-ra nő. (18), (19), valamint (6) összevetéséből

$$v_2^2 = \frac{2dg\left[\operatorname{tg}\alpha - 2\left(\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)\right]}{1+(2\sin\alpha)^2} \tag{20}$$

adódik. Ebből látható, hogy α csak addig nőhet, amíg

$$\operatorname{tg}\alpha - 2\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha} = 0. \tag{21}$$

nem lesz. A (21) megoldásaként adódó α-nál $\Delta E_h = 0$, a rendszer összes energiája megint, ugyanúgy, ahogy az indulás pillanatában, helyzeti energia lesz, tehát a rendszer az $\alpha = 0$ és a (21) megoldásaként adódó α_v érték között rezeg. (21) a

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)} \quad \text{és} \quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}$$

összefüggések felhasználásával a

$$\operatorname{tg}(\alpha_v/2) = 1/2 \tag{22}$$

alakra hozható, ahonnan az

$$\alpha_v = 53{,}13° \tag{23}$$

eredmény kapható. $0°$ és $53{,}13°$ között $v_2 \neq 0$, tehát a két gyorsulás közül egyszerre csak az egyik lehet nulla.

$\alpha = 0$-ban $v_2 = 0$ (így indítjuk a rendszert) és így a (17) összefüggésből $a_1 = 0$. (1) szerint ekkor $K = mg$, (tehát nem végtelen nagy), így (2)-ből $a_2 = g$ adódik.

A visszafordulás pontjában, α_v-nél megint $v_2 = 0$. (17), (1) és (2) egy háromismeretlenes egyenletrendszer, amelyből K-t kiküszöbölve

$$a_1 = -0{,}27g$$

(24)
$$a_2 = -0{,}17g$$

kapható. Tehát itt sem lesz mindkét gyorsulás nulla (ezt egyébként tudhattuk volna előre: ha a gyorsulások is és a sebességek is nullák, a rendszer nyugalomban maradna, az viszont $\alpha = 30°$-nál lehet csak).

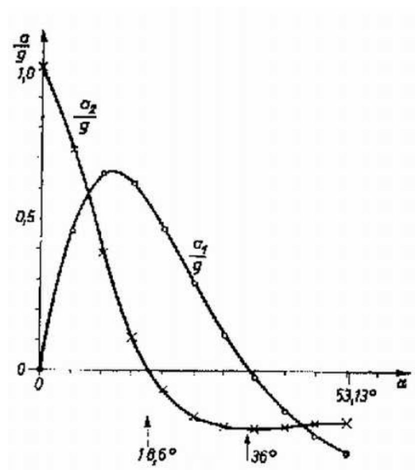
A válasz tehát az, hogy a feladatban leírt indítás esetén a rendszer rezgést végez, miközben α 0° és 53,13° között változik. A mozgás folyamán nem fordul elő, hogy mindkét gyorsulás egyszerre lenne nulla.

(1), (2), (6), (17) és (20) egyébként egy olyan egyenletrendszert alkot, melyből a_1, a_2, v_1 és v_2 az α függvényében könnyen kiszámítható.

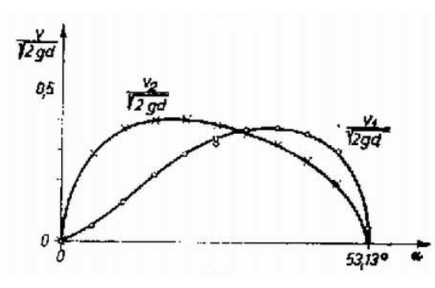
(25)
$$a_1 = \frac{g}{1+4\sin^2\alpha}\left\{(1-2\sin\alpha)2\sin\alpha + \frac{4\cos^2\alpha\left[\sin\alpha - 2(1-\cos\alpha)\right]}{1+4\sin^2\alpha}\right\};$$
$$a_2 = \frac{g}{1+4\sin^2\alpha}\left\{(1-2\sin\alpha) - 2\sin\alpha\frac{4\cos^2\alpha\left[\sin\alpha - 2(1-\cos\alpha)\right]}{1+4\sin^2\alpha}\right\};$$

$$v_1 = \pm\sqrt{2dg}\cdot 2\sin\alpha\sqrt{\frac{\sin\alpha - 2(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha(1+4\sin^2\alpha)}};$$

(26)
$$v_2 = \pm\sqrt{2dg}\sqrt{\frac{\sin\alpha - 2(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha(1+4\sin^2\alpha)}};$$



3. ábra



4. ábra

A sebességek előjele pozitív, ha α nő, és negatív, ha α csökken. A kapott görbéket mutatja a 3. és a 4. ábra. Ezekről leolvasható, hogy amikor

$$a_2 = 0, \quad \text{akkor} \quad \alpha \cong 18{,}6°, \quad v_1 \cong 0{,}41\sqrt{2gd}, v_2 \cong 0{,}36\sqrt{2gd}, \quad a_1 \cong 0{,}55g,$$

és amikor

$$a_1 = 0, \quad \text{akkor} \quad \alpha \cong 36°, \quad v_1 \cong 0{,}38\sqrt{2gd}, \quad v_2 \cong 0{,}33\sqrt{2gd}, \quad s_2 \cong -0{,}19g.$$

Woynarovich Ferenc