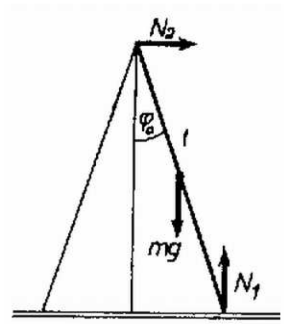
I. megoldás. Elegendő, ha csak a létra egyik szárának mozgását vizsgáljuk. Az l hosszú szárra az 1. ábrán feltüntetett erők hatnak. A talaj N_1 nyomóereje függőleges irányú, mert a súrlódás elhanyagolható, a másik szár által közvetített N_2 erő pedig a létra szimmetriája miatt csak vízszintes irányú lehet.



1. ábra

Legyen a szár szöggyorsulása β, a tömegközéppont gyorsulásának komponensei legyenek a_x és a_y. Írjuk fel a mozgásegyenleteket a tömegközéppontra:

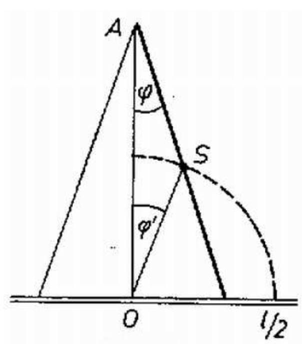
(1) $$mg - N_1 = ma_y,$$

(2) $$N_2 = ma_x,$$

(3) $$N_1(l/2)\sin\varphi - N_2(l/2)\cos\varphi = \Theta_S\beta,$$

ahol a tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték:

(4) $$\Theta_S = (1/12)ml^2.$$



2. ábra

A következő lépés a gyorsulás komponensei és a szöggyorsulás közti kapcsolat meghatározása. Vegyük észre, hogy az S tömegközéppont az O pont körül egy $l/2$ sugarú körön mozog (2. ábra), mégpedig éppen azzal a β szöggyorsulással, mint a létra szára az S tömegközéppont körül. Az OSA háromszög ugyanis egyenlőszárú, ezért $\varphi(t) = \varphi'(t)$ minden időpillanatban, így második deriváltjuk, a szöggyorsulás is megegyezik. Így a_x és a_y a tömegközéppont O körüli körmozgásának kerületi gyorsuláskomponensei:

(5) $$a_x = \beta(l/2)\cos\varphi,$$

(6) $$a_y = \beta(l/2)\sin\varphi.$$

A létra legfelső pontjának elmozdulása mindig kétszerese a súlypont függőleges elmozdulásának, ezért gyorsulása

(7) $$a = 2a_y.$$

Az (1)–(7) egyenletrendszer megoldása:

(8) $$a = (3/2)g\sin^2\varphi.$$

Ha t sokkal kisebb, mint a létra tetejének földet éréséhez szükséges idő, akkor ezalatt φ nem sokat változik, és a gyorsulás közel állandónak tekinthető. (8) alapján az igen rövid idő alatt megtett út:

$$s = (1/2)at^2 = (3/4)gt^2\sin^2\varphi_0,$$

vagy $\varphi_0 = 15°$ behelyettesítésével:

$$s = 0{,}5\ (\mathrm{m/s}^2) \cdot t^2,$$

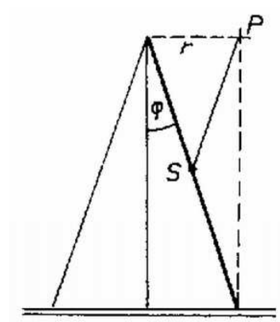
Kávássy Lóránd (Kecskemét, Katona J. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. A forgómozgás egyenletét a tömegközépponton kívül a pillanatnyi forgástengelyre is fel tehet írni. A létra szára a 3. ábrán feltüntetett P pont körül fordul el. (P a szár végpontjainak elmozdulására merőlegesen állított egyenesek metszéspontja.) A P pont természetesen „vándorol" a mozgás során. A pillanatnyi forgástengelyre vonatkoztatva a létra szára csak forgómozgást végez:

$$M = \Theta\beta,$$

(9) $$(1/2)mgl\sin\varphi = \Theta\beta.$$

Felhasználtuk, hogy az N_1 és N_2 erők hatásvonala keresztülhalad P ponton, így nincs forgatónyomatékuk.



3. ábra

A pillanatnyi forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték a Steiner-tétel alapján:

(10) $$\Theta = \Theta_s + m(l/2)^2 = (1/3)ml^2.$$

A felső végpont gyorsulása (l. a 3. ábrát)

$$a = r\beta = Bl\sin\varphi.$$

(9) és (10) behelyettesítésével

$$a = (3/2)g\sin^2\varphi.$$

A rövid idő alatti elmozdulás az előző megoldással egyezően így

$$s = (3/4)gt^2\sin^2\varphi_0.$$

Kolláth Zoltán (Törökszentmiklós, Bercsényi M. Gimn., III. o. t.)

III. megoldás. Alkalmazzuk az energiamegmaradás tételét! Ismét elegendő a létra egyik szárát vizsgálni. Ha a létra teteje s utat tesz meg, szárának tömegközéppontja $(s/2)$-vel kerül lejjebb. A potenciális energia változása

(11) $$\Delta U_{pot} = mgs/2,$$

a mozgási energia növekedése

(12) $$\Delta U_{kin} = /(1/2)\Theta_S\omega^2 + (1/2)mv^2.$$

Az első megoldásban a kényszerfeltétel keresésekor bizonyítottuk, hogy az S tömegközéppont O pont körüli forgómozgását ugyanaz a $\varphi(t)$ függvény írja le, mint ami a létra szárának súlypont körüli elfordulását. Emiatt

(13) $$v = (l/2)\omega.$$

Az energiamegmaradás törvénye alapján $\Delta U_{pot} = \Delta U_{kin}$

$$(1/2)mgs = (1/2)\cdot(1/3)m(l/2)^2\omega^2 + (1/2)mv^2,$$

ahonnan (13) felhasználásával

(14) $$v = \sqrt{(3/4)gs}.$$

A súlypont elmozdulásának függőleges sebességkomponense: $v_y = \sin\varphi$, a létra csúcsának sebessége pedig s út megtétele után:

(15) $$v_A = 2v_y = 2v\sin\varphi = \sqrt{3gs}\sin\varphi.$$

t sokkal kisebb, mint a földetéréshez szükséges idő, ezért a legfelső pont gyorsulását ezalatt állandónak tekinthetjük. Egyenletesen gyorsuló mozgásnál

$$s=\frac{v_A t}{2},$$

azaz (15) alapján

$$s=\frac{\sqrt{3gs}}{2}\,t\sin\varphi_0,\qquad \text{így}\qquad s=(3/4)gt^2\sin^2\varphi_0.$$

Umann Gábor (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)