I. megoldás. A közegellenállási erő a sebesség négyzetével arányos:

(1) $$F_k = -kv^2.$$

Tudjuk, hogy $v_0 = 40$ km/h sebességnél a kötelet $F_0 = -F_k(v_0) = 400$ N erő feszíti. Innen

(2) $$k = F_0/v_0^2 = 3{,}24 \text{ kg/m}.$$

A kötél elengedése után a vízisíelőre csak a közegellenállási erő hat; mozgásegyenlete:

(3) $$ma = F_k = -kv^2,$$
$$m \cdot (\mathrm{d}v/\mathrm{d}t) = kv^2.$$

A kapott összefüggést így is írhatjuk:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-1/v) = -k/m,$$

így integrálva:

(4) $$-1/v = -(k/m)t + C_1,$$

ahol C_1 állandó. A C_1 konstans értékét abból a feltételből határozhatjuk meg, hogy $t = 0$ esetén a sebesség v_0:

(5) $$C_1 = -1/v_0.$$

Így a sebesség időfüggése:

(6) $$v(t) = \frac{mv_0}{kv_0t + m}.$$

A vízisíelő t_1 ideig siklik a vízen a kötél elengedése után, addig, amíg sebessége nagyobb a $v_{min} = 10$ km/h értéknél. Eszerint

(7) $$v_{min} = \frac{mv_0}{kv_0t_1 + m}, \qquad \text{innen} \qquad t_1\frac{m}{kv_0} \cdot \frac{v_0 - v_{min}}{v_{min}} = 5,83 \text{ s}.$$

A (6) összefüggés ismeretében a 0-tól t_1-ig terjedő időintervallum alatt megtett út:

(8) $$s = \int_0^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_1} \frac{mv_0}{kv_0t + m}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{m}{k}\ln(kv_0t + m)\right]_0^{t_1} = \frac{m}{k}\ln\frac{kv_0t + m}{m}.$$

t_1 és k értékét behelyettesítve a kérdezett út:

(9) $$s = (mv_0^2/F_0)\ln(v_0/v_{min}) = 30 \text{ m}.$$

Szalontai Zoltán (Törökszentmiklós, Bercsényi M. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Lényegesen egyszerűbb a megoldás, ha a sebességet közvetlenül a (kötél elengedése után) megtett út függvényében vizsgáljuk. A közegellenállási erő Δs úton végzett munkája a vízisíelő kinetikus energiáját csökkenti:

$$-|F_k|\Delta s = \Delta E_{kin^1}$$
$$-kv^2\Delta s = (1/2)m\Delta v^2,$$
$$\Delta v^2/\Delta s = -(2k/m)v^2.$$

Ebből a $\Delta s \to 0$ határátmenettel a következőket kapjuk:

$$dv^2/\mathrm{d}s = -(2k/m)v^2.$$

A nyert egyenletet így is írhatjuk:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\ln v^2) = -2k/m,$$

integrálás után a következőt kapjuk:

$$v^2 = v_0^2 e^{-(2k/m)s},$$

ahol figyelembe vettük, hogy a kötél elengedésekor ($s = 0$) a sebesség értéke v_0 volt.

Négyzetgyököt vonva:

$$v = v_0\,\mathrm{e}^{-(k/m)s}.$$

A síelő addig marad a víz felett, míg v eléri v_{min}, értékét:

$$s = -(m/k)\ln(v_{min}/v_0) = (mv_0^2/F_0)\ln(v_0/v_{min}) = 30\ \mathrm{m}.$$

Megjegyzés. A sebesség – út összefüggéshez közvetlenül a mozgásegyenletből is eljuthatunk:

$$ma = -kv^2,$$
$$m(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t) = m(\mathrm{d}v/\mathrm{d}s)(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t) = m(\mathrm{d}v/\mathrm{d}s)v = -kv^2,$$
$$\text{így}\ \mathrm{d}v/\mathrm{d}s = -(k/m)v, \qquad \text{ahonnan} \qquad v = v_0\,\mathrm{e}^{-(k/m)s}.$$

Keszthelyi Bettina (Bp., Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., IV. o. t.)