1. Amikor a rugót húzni kezdjük, a test mindaddig nyugalomban marad, amíg a rugóerő el nem éri a tapadási súrlódási erő maximumát. A test megmozdulásának pillanatában a rugó x_0 megnyúlására

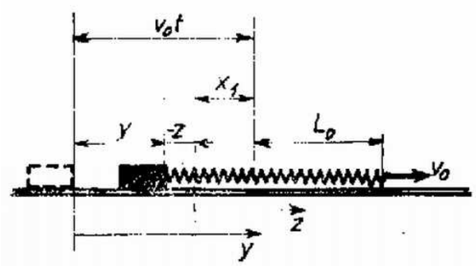
$$kx_0 = \mu_0 mg,$$

ahonnan

(1) $$x_0 = \frac{\mu_0 mg}{k} \approx 0{,}12 \text{ m}.$$

A megmozdulásig eltelt idő

$$t_0 = \frac{x_0}{v_0} = \frac{\mu_0 mg}{kv_0} \approx 0{,}6 \text{ s}.$$



1. ábra

2. A mozgás következő szakaszát vizsgáljuk a rugóval együtt v_0 sebességgel mozgó koordináta-rendszerben. A koordináta-rendszer origóját válasszuk úgy meg, hogy az origóban levő testre ható rugóerő éppen egyensúlyt tartson a csúszási súrlódási erővel (1. ábra). A rugó megnyúlása ekkor

(2) $$x_1 = \frac{\mu mg}{k} \approx 0{,}08 \text{ m}.$$

Ebben a koordináta-rendszerben a test harmonikus rezgőmozgást végez. Legyen ugyanis a test kitérése z. (Akkor tekintjük pozitívnak, ha a test a rugó húzásának irányában mozdul ki.) Ekkor a rugó megnyúlása $x_1 - z$, így a rugóerő és a súrlódási erő eredője

$$F = (x_1 - z)k - \mu mg = -zk.$$

Szükségünk lesz a rugóval együtt mozgó és a tömeg kezdeti helyzetéhez rögzített koordináta-rendszer közötti áttérés összefüggéseire:

(3) $$y = z + v_0 t - x_1,$$

(4) $$w = v + v_0,$$

ahol y és w az álló, z és v a mozgó rendszerre vonatkozik, a gyorsulás nyilvánvalóan azonos a két rendszerben, és az időt a rugó megmozdításának pillanatától számítjuk.

A mozgó koordináta-rendszerben a test harmonikus rezgőmozgást végez, amelynek körfrekvenciája:

(5) $$\omega = \sqrt{k/m} \approx 5 \text{ s}^{-1}.$$

A rezgés kitérése és sebessége

(6a) $$z = A \sin\left[\omega(t - t_0) + \varphi\right],$$

(6b) $$v = A\,\omega \cos\left[\omega(t - t_0) + \varphi\right].$$

A rezgés amplitúdóját és fázisát a kezdeti feltételek határozzák meg. A megcsúszás pillanatában $t = t_0$, a kitérés (3) felhasználásával

(7) $$z = A \sin\varphi = x_1 - v_0 t = x_1 - x_0 = -(\mu_0 - \mu)(mg/k) \approx -0{,}04 \text{ m},$$

a sebesség (4)-ből

(8) $$v = A\omega \cos\varphi = -v_0 = -0{,}2 \text{ m/s}.$$

(7) és (8) alapján

(9) $$A^2 = z^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = (\mu_0 - \mu)^2 \frac{m^2 g^2}{k^2} + \frac{v_0^2 m}{k},$$

A fázisszögre a következőt kapjuk:

$$\sin\varphi = \frac{z}{A} \approx -\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\cos\varphi = \frac{v}{A\omega} \approx -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

tehát φ a harmadik szögnegyedbe esik, $\varphi \approx \dfrac{5\pi}{4}$ A mozgást a nyugvó koordináta-rendszerben leíró egyenletek (3) és (4) felhasználásával

(11a) $$y \approx \sqrt{2}\cdot 0{,}04\ \mathrm{m}\cdot\sin\left[5\frac{1}{\mathrm{s}}(t-0{,}6\ \mathrm{s})+\frac{5\pi}{4}\right]+0{,}2(\mathrm{m/s})\cdot \mathrm{t}-0{,}08\ \mathrm{m},$$

(11b) $$w \approx \sqrt{2}\cdot 0{,}2\ \mathrm{m/s}\cdot\cos\left[5\frac{1}{8}(t-0{,}6\ \mathrm{s})+\frac{5\pi}{4}\right]+0{,}2\ \mathrm{m/s},$$

(11c) $$a \approx -\sqrt{2}\ \mathrm{m/s^2}\cdot\sin\left[5\frac{1}{\mathrm{s}}(t-0{,}6\ \mathrm{s})+\frac{5\pi}{4}\right].$$

Ezek az összefüggések csak addig érvényesek, amíg a test mozog, azaz $w > 0$. $w = 0$ esetén a test megáll, és addig marad nyugalomban, amíg a rugóerő ismét el nem éri a tapadási súrlódási erő maximális értékét. (11b) alapján a $w = 0$ egyenlőség akkor következik be, amikor

(12) $$\cos\left[5\frac{1}{\mathrm{s}}(t_1-0{,}6\ \mathrm{s})+\frac{5\pi}{4}\right] = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ez az $5\pi/4$ fázisszög után legközelebb akkor valósul meg, amikor

$$5\ \mathrm{s}^{-1}(t_1-0{,}6\ \mathrm{s})+5\pi/4 = 2\pi+(3\pi/4),$$

vagyis

(13) $$t_1-0{,}6\ \mathrm{s}\approx 1\ \mathrm{s},\quad t_1\approx 1{,}6\ \mathrm{s}.$$

3. A megállás pillanatában (7) alapján a test a mozgó koordináta-rendszer

$$z = (\mu_0-\mu)(mg/k)\approx 0{,}04\ \mathrm{m}$$

koordinátájú helyén van. A test egészen addig nem mozdul meg, amíg $z \approx -0{,}04$ m nem lesz, tehát a rugó végét

$$2(\mu_0-\mu)(mg/k)\approx 0{,}08\ \text{m-rel}$$

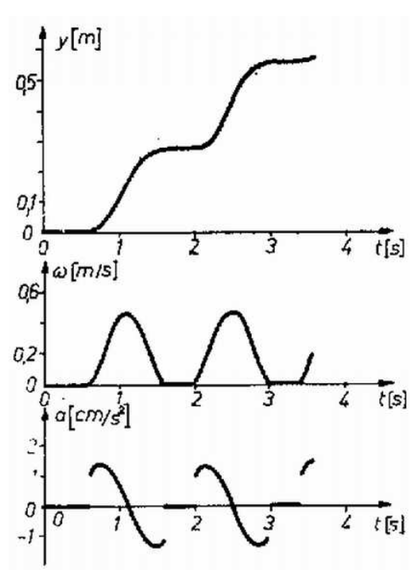
nem húzzuk tovább. Az ehhez szükséges időtartam

(14) $$t_2-t_1 = 2(\mu_0-\mu)mg/(kv_0)\approx 0{,}4\ \mathrm{s},$$

tehát az újabb megindulás időpontja

$$t_2 \approx 2\ \mathrm{s}.$$

Ezután a mozgás a 2. és 3. szakasz periodikus ismétlődésével folytatódik tovább, a periódusidő 1,4 s. A test helyét, sebességét és gyorsulását a számítások alapján a 2. ábrán mutatjuk be.



2. ábra

Madi Tibor (Kecskemét, Katona J. Gimn., III. o. t.)