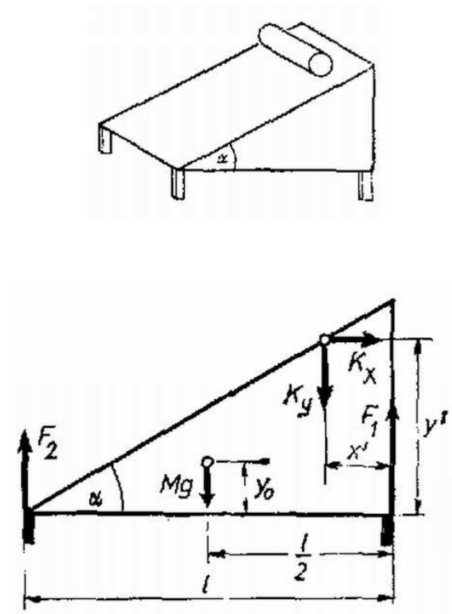
I. megoldás. Mivel a lejtő nincs kitámasztva, és a talaj mentén a súrlódás elhanyagolható, a lejtő is mozogni fog. A lábaknál ható erők megadásához két adat szükséges: a henger lejtőhöz viszonyított helyzete az idő függvényében, valamint a lejtőre ható erő a henger érintkezési pontjánál. Az 1. ábrán a henger lejtőhöz viszonyított helyzetét az x', y' koordinátákkal; a lejtőre gyakorolt erőt a K_x, K_y komponensekkel jelöltük.



1. ábra

A lejtő függőlegesen nem gyorsul, tehát

$$Mg + K_y = F_1 + F_2, \tag{1}$$

ahol F_1 a magas oldalon, F_2 az alacsony oldalon levő lábaknál ható erők eredője. A lejtő nem fordul el, ezért a *tömegközéppontra* felírt forgatónyomatékok eredője nulla. (Mivel a lejtő vízszintesen gyorsul, a forgatónyomatékokat nem lehet önkényesen megválasztott pontra felírni. Merev testeknél a tömegközéppontra felírt forgatónyomaték tetszőleges mozgásnál helyes eredményt ad – 1. Budó: Mechanika 28.§ és 49.§.) Ha a lejtő tömegközéppontja y_0 magasságban van – az l hosszúságú alaplap mentén középen –, akkor a forgatónyomatékok eredője:

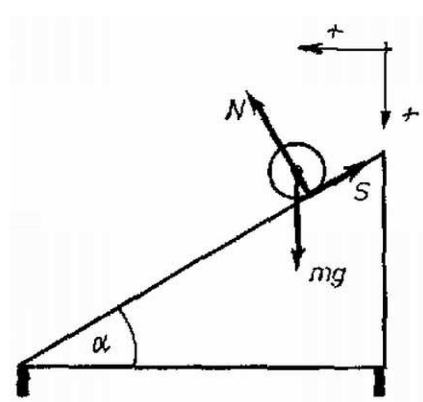
$$(l/2)F_2 + K_x(y' - y_0) + K_y\left[(l/2) - x'\right] - (l/2)F_1 = 0. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenletekből a lejtő magas oldalán levő egy-egy lábnál ébredő erő:

$$\frac{1}{2}F_1 = \frac{1}{4}Mg + \frac{1}{2}K_x\frac{y' - y_0}{l} + \frac{1}{2}K_y\frac{l - x'}{l}, \tag{3}$$

míg a másik oldalon

$$\frac{1}{2}F_2 = \frac{1}{4}Mg - \frac{1}{2}K_x\frac{y' - y_0}{l} + \frac{1}{2}K_y\frac{x'}{l}. \tag{4}$$



2. ábra

Az erők és a gyorsulások meghatározásához vizsgáljuk először a henger mozgását. A 2. ábrán a hengerre ható erők és a gyorsulásoknál használt pozitív irányok vannak feltüntetve. A lejtő nyomóereje merőleges a lejtő síkjára (tehát $N_x = N\sin\alpha$, $N_y = N\cos\alpha$), viszont $|N| \neq mg\cos\alpha$, mert *álló koordináta-rendszerben* a henger *lejtőirányú* elmozdulása a lejtő mozgása miatt azt jelentené, hogy a henger elhagyja a lejtőt.

A mozgásegyenletek:

$$ma_x = N_x - S_x = N\sin\alpha - S\cos\alpha, \tag{5}$$

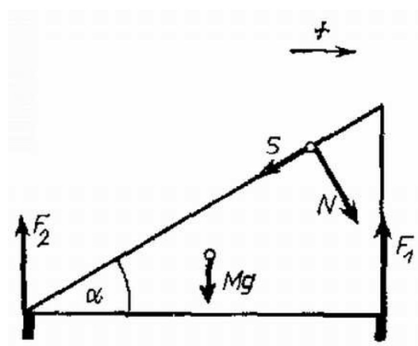
$$ma_y = mg - N_y - S_y = mg - N\cos\alpha - S\sin\alpha, \tag{6}$$

$$\Theta\beta = (1/2)mr^2\beta = Sr. \tag{7}$$

Ha a henger csúszva gördül, akkor a súrlódási erő:

$$S = \mu N, \tag{8}$$

míg tökéletes gördülésnél $S < \mu N$, és ekkor a súrlódási erő értékét a gördülés kényszerfeltételéből lehet meghatározni.



3. ábra

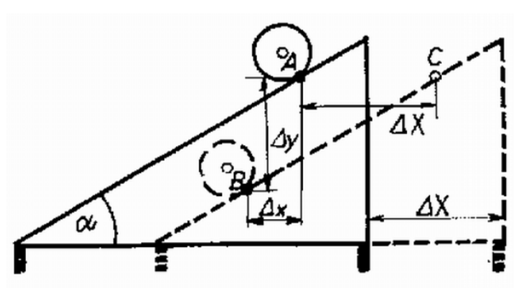
A hengerre ható erők ellenereje a 3. ábrán látható. A lejtő vízszintes gyorsulását (A_x) az ábrán feltüntetett előjellel tekintjük pozitívnak. A lejtőre ható erők a henger érintkezési pontjánál:

$$K_x = N_x - S_x = N\sin\alpha - S\cos\alpha, \tag{9}$$

$$K_y = N_y + S_y = N\cos\alpha + S\sin\alpha. \tag{10}$$

A mozgásegyenlet:

$$MA_x = N_x - S_x = N\sin\alpha - S\cos\alpha. \tag{11}$$



4. ábra

A kényszerfeltételek meghatározásához a 4. ábrán felrajzoltuk a henger és a lejtő helyzetét két egymást követő pillanatban. Mivel a henger a lejtőn marad, $\Delta y = (\Delta x + \Delta X)\,\mathrm{tg}\,\alpha$, ezt az összefüggést az idő szerint kétszer deriválva az

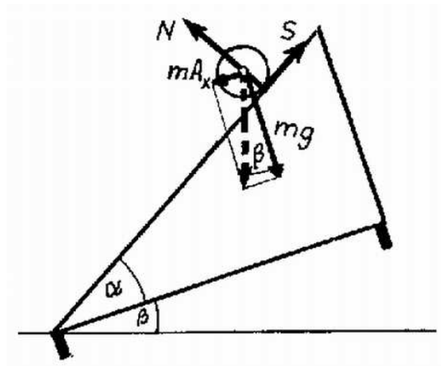
$$a_y = (a_x + A_x)\,\mathrm{tg}\,\alpha \tag{12}$$

kényszerfeltételt kapjuk. Tökéletes gördülésnél, ha a henger a két helyzet között $\Delta\varphi$ szögelfordulást végez, a henger kerületének $r\varphi$ szakasza megegyezik a CB távolsággal (a C pontnak megfelelő helyről indult és a B pontba érkezett)

$$r\varphi = \frac{\Delta x + \Delta X}{\cos\alpha};$$

ebből kétszeri deriválással:

$$r\beta = \frac{a_x + A_x}{\cos\alpha}. \tag{13}$$



5. ábra

Néhány átrendezést meg lehet tenni a csúszva gördülés és a tisztán gördülés esetének szétválasztása előtt. A (6) és (11) egyenlet összehasonlításából:

$$A_x = \frac{m}{M} a_x, \tag{14}$$

így a „lejtőn maradás” kényszerfeltétele (12) alapján

$$a_y = a_x \left[1 + (m/M)\right] \operatorname{tg} \alpha. \tag{15}$$

Csúszás esetén az (5), (6), (8) és (15) egyenletek egyszerű egyenletrendszert alkotnak, amelynek megoldása:

$$a_x = \frac{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cos\alpha}{1 + (m/M) - (m/M)\cos\alpha(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}, \tag{16}$$

$$N = \frac{mg\cos\alpha}{1 + (m/M) - (m/M)\cos\alpha(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}. \tag{17}$$

(Vegyük észre, hogy $M \gg m$ esetén valóban visszakapjuk az álló lejtőnél várt eredményt.)

A henger lejtőhöz viszonyított helyzetének meghatározásához az $x' = (1/2)(a_x + A_x)t^2$ relatív elmozdulást a (14), az $y' = l\sin\alpha - (1/2)a_y t^2$ távolságot a (15), a lejtőre ható erőket a (8) és a (9), (10) egyenletekbe való egyszerű behelyettesítéssel kapjuk:

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{gt^2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cos\alpha}{1 + (m/M) - (m/M)\cos\alpha(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} \left[1 + (m/M)\right], \\
y' &= l\sin\alpha - x' \operatorname{tg}\alpha, \\
K_x &= \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cos\alpha}{1 + (m/M) - (m/M)\cos\alpha(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}, \\
K_y &= \frac{mg(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)\cos\alpha}{1 + (m/M) - (m/M)\cos\alpha(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}.
\end{aligned}$$

A lejtő lábainál ható erők ezek ismeretében, (3) és (4) alapján:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}F_1 = \frac{1}{4}Mg + \frac{1}{2}\, &\frac{mg\cos\alpha}{1 + (m/M) - (m/M)\cos\alpha\,(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} \cdot \\
\cdot \Bigg\{ (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) &\left[\sin\alpha - \frac{\left[gt^2/(2l)\right](\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\sin\alpha\left[1 + (m/M)\right]}{1 + (m/M) - (m/M)\cos\alpha\,(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} - \frac{y_0}{l} \right] + \\
+(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) &\left[1 - \frac{\left[gt^2/(2l)\right](\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cos\alpha\left[1 + (m/M)\right]}{1 + (m/M) - (m/M)\cos\alpha\,(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} \right] \Bigg\},
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}F_2 = \frac{1}{4}Mg + \frac{1}{2}\, &\frac{mg\cos\alpha}{1 + (m/M) - (m/M)\cos\alpha\,(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} \cdot \\
\cdot \Bigg\{ (\mu\cos\alpha - \sin\alpha) &\left[\sin\alpha - \frac{\left[gt^2/(2l)\right](\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\sin\alpha\left[1 + (m/M)\right]}{1 + (m/M) - (m/M)\cos\alpha\,(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} - \frac{y_0}{l} \right] + \\
+(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) &\frac{\left[gt^2/(2l)\right](\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cos\alpha\left[1 + (m/M)\right]}{1 + (m/M) - (m/M)\cos\alpha\,(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Tökéletes gördülésnél a súrlódási erőt a (8) egyenlet helyett a (1) kényszerfeltételből és a forgómozgást leíró (7) egyenletből kell meghatározni:

$$S = \frac{1}{2}\, m\, \frac{a_x + A_x}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}\, \frac{m a_x}{\cos\alpha}\left(1 + \frac{m}{M}\right). \tag{20}$$

A csúszásmentesen gördülő henger mozgását leíró (5), (6), (15) és (20) egyenletek megoldása:

$$a_x = \frac{(2/3) g \sin\alpha\cos\alpha}{1 + (m/M) - (2/3)(m/M)\cos^2\alpha}; \tag{21}$$

$$a_y = \frac{(2/3) g \sin^2\alpha\,[1 + (m/M)]}{1 + (m/M) - (2/3)(m/M)\cos^2\alpha}; \tag{22}$$

$$S = \frac{1}{3}\frac{mg\sin\alpha\,[1 + (m/M)]}{1 + (m/M) - (2/3)(m/M)\cos^2\alpha}; \tag{23}$$

$$N = \left(1 + \frac{m}{3M}\right)\frac{mg\cos\alpha}{1 + (m/M) - (2/3)(m/M)\cos^2\alpha}. \tag{24}$$

Az x', y' koordináták, valamint K_x és K_y meghatározása a_x, a_y, S és N ismeretében ugyanúgy történik, mint az előbb. Ha ezeket kiszámoltuk, (3)-ba és (4)-be helyettesítve tisztán gördülés esetén a végeredmény:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}F_1 &= \frac{1}{4}Mg + \frac{1}{3}\cdot\frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{1 + (m/M) - (2/3)(M/m)\cos^2\alpha}\cdot\\
&\cdot\left\{\sin\alpha - \frac{1}{3l}\cdot\frac{gt^2\sin^2\alpha\,[1 + (m/M)]}{1 + (m/M) - (2/3)(m/M)\cos^2\alpha} - \frac{y_0}{l} + \left[\frac{3}{2}\left(1 + \frac{m}{3M}\right)\operatorname{ctg}\alpha + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)\operatorname{tg}\alpha\right]\cdot\right.\\
&\left.\cdot\left(1 - \frac{1}{3l}\frac{gt^2\sin\alpha\cos\alpha}{1 + (m/M) - (2/3)(m/M)\cos^2\alpha}\right)\right\};
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}F_2 &= \frac{1}{4}Mg + \frac{1}{3}\frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{1 + (m/M) - (2/3)(m/M)\cos^2\alpha}\cdot\\
&\cdot\left\{\frac{1}{3l}\frac{gt^2\sin^2\alpha\,[1 + (m/M)]}{1 + (m/M) - (2/3)(m/M)\cos^2\alpha} + \frac{y_0}{l} - \sin\alpha + \right.\\
&\left.+\left[\frac{3}{2}\left(1 + \frac{m}{3M}\right)\operatorname{ctg}\alpha + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)\operatorname{tg}\alpha\right]\frac{1}{3l}\frac{gt^2\sin\alpha\cos\alpha}{1 + (m/M) - (2/3)(m/M)\cos^2\alpha}\right\}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Tökéletes gördülés akkor jön létre, ha a súrlódási együttható egy kritikus, μ_0 értéknél nagyobb. A kritikus súrlódási együtthatót legegyszerűbben abból a feltételből határozhatjuk meg, hogy ha $\mu = \mu_0$, akkor a „csúszva gördüléshez” és a tökéletes gördüléshez tartozó gyorsulásértékek megegyeznek. (16) és (21) egyenlővé tételével μ_0-ra egyenletet kapunk, aminek megoldása:

$$\mu_0 = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha\frac{1 + (m/M)}{1 + [m/(3M)]}. \tag{27}$$

Mint minden korábbi kifejezés, ez is visszaadja a várt eredményt $M \gg m$ esetén.

Összefoglalva: a lejtő lábánál fellépő erők az idő függvényében olyan parabolaívekkel ábrázolhatók, amelyek paramétereit a $\mu \le \mu_0$ esetben a (18), (19); a $\mu \ge \mu_0$ esetben a (25), (26) egyenletek adják meg.

II. megoldás. Az előző megoldás hosszadalmas (elsősorban a sokismeretlenes egyenletrendszerek megoldása miatt), azonban kellő türelemmel különösebb nehézség nélkül végigszámolható. Az alábbi megoldásban – ahol a lejtővel együtt gyorsuló koordináta-rendszerben számolunk – a számolási munka lényegesen kevesebb, de több buktatóval találkozhatunk.

A gyorsuló koordináta-rendszerre vonatkozó mennyiségeket $'$-vel jelöljük. A hatás–ellenhatás törvénye alapján tudjuk, hogy álló rendszerben $ma_x = MA_x$, azaz a lejtővel együtt gyorsuló rendszerben a henger gyorsulása:

$$a'_x = a_x + A_x = [(M/m) + 1]\,A_x. \tag{1}$$

A gyorsuló koordináta-rendszer nem inerciarendszer, de az ún. tehetetlenségi erők bevezetésével alkalmazhatók a Newton-törvények. (Gyorsuló rendszerről l.: Budó – Pócza: Kísérleti Fizika I. rész. F. fejezet.) Az A_x gyorsulással mozgó rendszerben a m tömegű hengerre $-mA_x$, a lejtőre $-MA_x$ tehetetlenségi erő hat, amelyek támadáspontja az egyes testek tömegközéppontja. A gyorsuló koordináta-rendszerben a hengerre ható erők az 5. ábrán láthatók. Az ábra alapján megállapíthatjuk, hogy a henger úgy fog mozogni, mintha egy $\alpha' = \alpha + \beta$ hajlásszögű lejtőn $g' = g/\cos\beta$ nehézségi gyorsulású térben lenne, ahol

$$\operatorname{tg}\beta = A_x/g. \tag{2}$$

A közismert eredmények felhasználásával, csúszásnál

$$a' = g'(\sin\alpha' - \mu\cos\alpha'), \tag{3a}$$

illetve tökéletes gördülésnél

$$a' = (2/3)g'\sin\alpha' \tag{3b}$$

a henger lejtő irányú gyorsulása. Az alaplappal párhuzamos komponens mindkét esetben: $a'_x = a'\cos\alpha$. Az $\alpha' = \alpha + \beta$ és $g' = g/\cos\beta$ behelyettesítésével:

$$a'_x = g\cos\alpha\left[\sin\alpha - \mu\cos\alpha + \operatorname{tg}\beta(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)\right], \tag{4a}$$

illetve

$$a'_x = (2/3)g\cos\alpha\,(\sin\alpha + \operatorname{tg}\beta\cos\alpha). \tag{4b}$$

(1) és (2) alapján $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{a'_x}{(M/m)+1}$. Ezt a fenti kifejezésekbe behelyettesítve *egyismeretlenes* egyenletet kapunk a'_x-re. A megoldás:

$$a'_x = \frac{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cos\alpha\,[1 + (m/M)]}{1 + (m/M) - (m/M)\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}, \tag{5a}$$

illetve

$$a'_x = \frac{(2/3)g\sin\alpha\cos\alpha\,[1 + (m/M)]}{1 + (m/M) - (2/3)(m/M)\cos^2\alpha} \tag{5b}$$

(valóban megegyezik az I. megoldás $a_x + A_x = [1 + (m/M)]\,a_x$ értékével). A függőleges komponens mindkét esetben $a'_y = a'_x\operatorname{tg}\alpha$.

A lejtőre a hengerre ható erők ellenereje hat. Mivel a henger vízszintes gyorsulása a'_x; $|K_x| = ma'_x$, és mivel a függőleges gyorsulása a'_y; $|K_y| = m(g - a'_y) = m(g - a'_x\operatorname{tg}\alpha)$. A lábaknál ható erők meghatározásához felírandó egyenletek ugyanazok, mint az első megoldás (1) – (2) egyenletei. (Ha nem feledkezünk meg a gyorsuló koordináta-rendszerben a lejtő tömegközéppontjában ható $-MA_x$ tehetetlenségi erőről, akkor ebben a rendszerben a forgatónyomaték már tetszőleges pontra felírható.)

Az eredményben szereplő mennyiségek (K_x, K_y, $x' = (1/2)a'_x t^2$ és $y' = l\sin\alpha - (1/2)a'_x\operatorname{tg}\alpha\cdot t^2$) csak a'_x-t tartalmazzák paraméterként, amit a csúszás, illetve a gördülés esetére az (5) egyenletben már kiszámoltunk. A helyettesítés után kapott eredmény természetesen megegyezik az I. megoldás végeredményével. **Mihály György**