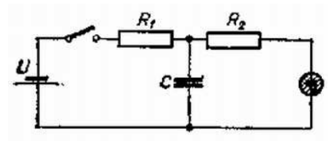
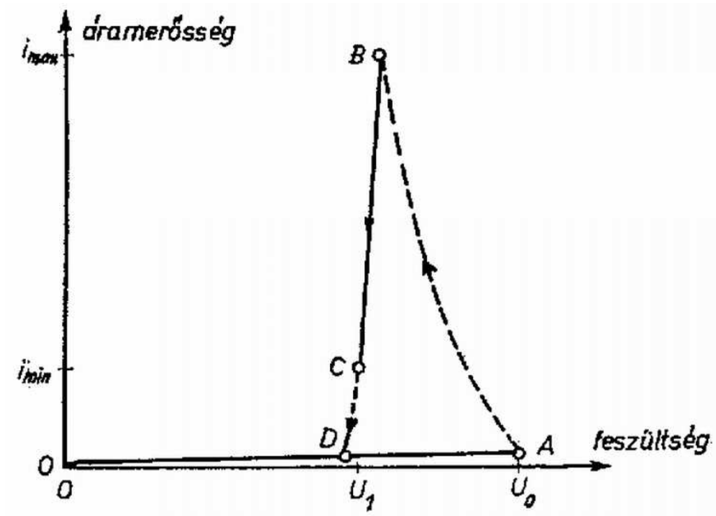
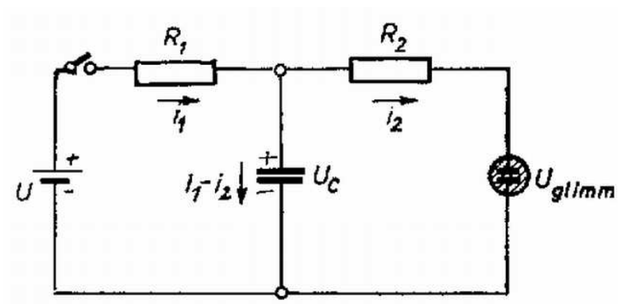




1. ábra

Foglalkozzunk először a ködfénylámpa áramerősség – feszültség karakterisztikájával (1. ábra)! Az U_0 bekapcsolási feszültségig növelve a ködfénylámpa feszültségét, rajta nagyon kis áram folyik, a glimmlámpa nem világít (OA szakasz). Amikor a feszültség eléri az U_0 értéket, a lámpa begyújt, a feszültsége nagyon rövid idő alatt U_1-re csökken (AB szakasz). A fénycsövön áthaladó maximális áramerősséget. ($i_{\max}$) a vele sorba kötött R_2 ellenállással lehet korlátozni. A begyújtott lámpán az áramerősségtől gyakorlatilag függetlenül U_1 feszültség esik, ezért ebben a tartományban feszültségstabilizálásra is fel lehet használni (BC szakasz). Ha az áramerősség egy küszöbérték ($i_{\min}$) alá csökken, akkor a lámpa azonnal kialszik, az áramerősség gyakorlatilag nullára zuhan (CD szakasz).



2. ábra

Nézzük ezután a konkrét kapcsolást (2. ábra)! A kapcsoló bekapcsolása után a telep kezdi feltölteni a C kondenzátort az R_1 ellenálláson keresztül. Egészen addig, amíg a kondenzátor feszültsége el nem éri a lámpa gyújtási feszültségét ($U_C < U_0$), a fénycsövön gyakorlatilag nem folyik áram (lásd az OA szakaszt az 1. ábrán), ezért a C kondenzátort az i_1 áram fogja tölteni ($i_2 = 0$).

A kondenzátor feszültségének megváltozása Δt idő alatt $\Delta U_C = \dfrac{i_1 \cdot \Delta t}{C}$, ebből $\Delta t \to 0$ határátmenettel adódik, hogy

$$\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} = \frac{i_1}{C}. \tag{1}$$

Írjuk fel a bal oldali hurokra Kirchhoff II. törvényét:

$$U - U_C = R_1 i_1. \tag{2}$$

Fejezzük ki (1)-ből i_1-et, és írjuk (2)-be. Rendezés után egy elsőrendű differenciálegyenletet nyerünk U_C-re (ill. $U - U_C$-re):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U - U_C) = \frac{1}{\tau_1}(U - U_C),$$

ahol τ_1 a feltöltési szakasz időállandója: $\tau_1 = R_1 C$. Ennek a kezdeti feltételt ($t = 0$-kor $U_C = 0$) kiegészítő megoldása

(3) $$U_C = U(1 - e^{-t/\tau_1}).$$

Ugyanis vezessük be az $U - U_C = V$ jelölést, ekkor a differenciálegyenlet alapján

$$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t + (1/\tau_1)V = 0, \quad \text{ezért} \quad \mathrm{d}(Ve^{t/\tau_1})\mathrm{d}t = 0.$$

Ebből a differenciálszámítás ismert tétele szerint következik, hogy

$$Ve^{t/\tau_1} = K \quad \text{(állandó)}, \quad V = Ke^{-t/\tau_1}.$$

A $V(0) = U$ kezdeti feltétel folytán $K = U$.

A kondenzátor feszültsége az U_0 gyújtási feszültséget t_{OA} idő alatt éri el, amelyet (3) alapján számolhatunk ki:

(4) $$t_{OA} = \tau_1 \cdot \ln \frac{U}{U - U_0}.$$

Numerikusan: $\tau_1 = 600\,\mathrm{s}$, $t_{OA} = 63,2\,\mathrm{s}$. Ha $x < -0,1$, akkor e^{-x} 0,5%-os hibán belül $(1 - x)$-szel helyettesíthető. Mivel esetünkben $(t_{OA}/\tau_1) \approx 0,1$, ezért a feltöltési szakaszban a kondenzátor feszültsége gyakorlatilag lineárisan növekszik: $U_C = (U/\tau_1) \cdot t$, az i_1 töltőáram, amelynek kezdeti értéke $U/R_1 = 100\,\mu\mathrm{A}$, elég lassan csökken a végső $\dfrac{U - U_0}{R_1} = 90\,\mu\mathrm{A}$ értékre.

Mivel a fénycsövön kikapcsolt állapotban csak nagyon kis áram folyik, ezért a ráeső feszültség a kondenzátor feszültségével egyezik meg (4. ábra, OA szakasz).

Begyújtott állapotban a lámpán i_2 áram halad át, s a lámpa mindaddig égve marad, míg ez $i_{\min}$ alá nem csökken. Rajta időben állandó U_1 feszültség mérhető. Keressük az i_2 áram időfüggését. Írjuk fel Kirchhoff II. törvényét a jobb oldali hurokra is:

(5) $$U_C - U_1 = R_2 i_2.$$

A kondenzátort az i_1 áram tölti, az i_2 pedig kisüti. Az (1) egyenlet általánosításával

(6) $$\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} = \frac{i_1 - i_2}{C}.$$

Differenciáljuk (2)-t és (5)-öt az idő szerint, és helyettesítsük be (6)-ot:

$$\tau_1(\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t) + i_1 - i_2 = 0, \qquad (7) \qquad \tau_2(\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t) - i_1 + i_2 = 0, \qquad (8)$$

ahol $\tau_2 = R_2 C$. Ennek a lineáris, elsőrendű differenciálegyenletrendszernek minden megoldása ilyen alakú:

$$i_1 = -A_1(\tau_2/\tau_1)e^{-t/\tau} + A_2, \qquad (9) \qquad i_2 = A_1 e^{-t/\tau} + A_2, \qquad (10)$$

ahol a τ közös időállandó reciproka az egyes körök időállandói reciprokának összege, továbbá A_1, A_2 állandók.

Ugyanis a (7), (8) egyenleteket összeadva nyerjük, hogy

(11) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tau_1 i_1 + \tau_2 i_2) = 0, \quad \text{ezért} \quad \tau_1 i_1 + \tau_2 i_2 = C_1 \quad \text{(állandó)}.$$

Innen

$$i_1 = (C_1/\tau_1) - (\tau_2/\tau_1)i_2,$$

ezt a (8) egyenletbe helyettesítve, τ_2-vel való osztás után a következő differenciálegyenlet adódik az i_2 ismeretlen függvényre:

$$\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}i_2 = \frac{C_1}{\tau_1\tau_2}.$$

A $C_1/(\tau_1\tau_2)$ állandót jelöljük C_2-vel, így a kapott egyenlet így is írható:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_2 - C_2\tau) + \frac{1}{\tau}(i_2 - C_2\tau) = 0.$$

Ebből a korábbiakhoz hasonlóan:

$$i_2 - C_2\tau = A_1 e^{-t/\tau},$$

ahol A_1 tetszőleges állandó. Eszerint

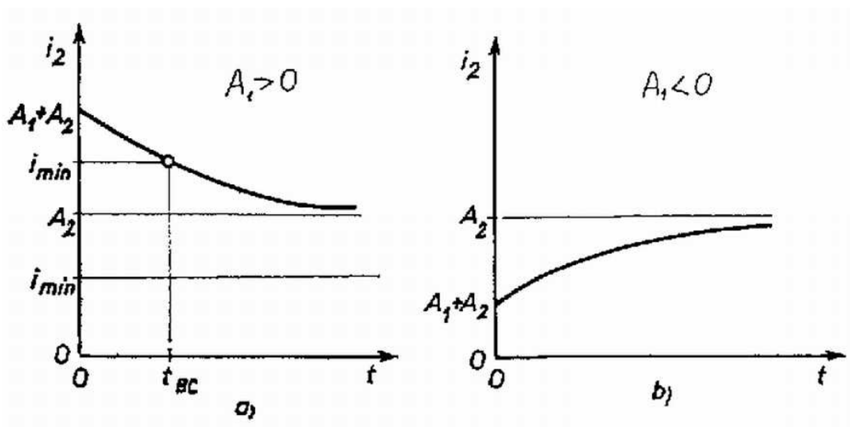
$$i_2 = A_1 e^{-t/\tau} + C_2\tau,$$

vagyis $A_2 = C_2\tau$ jelöléssel megkaptuk a (10) előállítást. (11) alapján könnyen adódik a (9) formula.

Egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy bármely A_1, A_2 állandó esetében a (9), (10) alatti i_1, i_2 függvények kielégítik a (7), (8) differenciálegyenlet-rendszert.

Kezdetben $i_1 = \dfrac{U - U_0}{R_1}$ és $i_2 = \dfrac{U_0 - U_1}{R_2}$, amelyekkel az A_1 és A_2 állandók kifejezhetők:

$$A_1 = \frac{\tau}{\tau_2}\left(\frac{U_0 - U_1}{R_2} - \frac{U - U_0}{R_1}\right), \quad A_2 = \frac{U_0 - U_1}{R_2} - A_1.$$



3. ábra

Egyszerű számolással belátható, hogy $A_2 > 0$ minden szóba jöhető paraméter értékekre. Így csak két eset fordulhat elő i_2 időfüggésének taglalásakor:

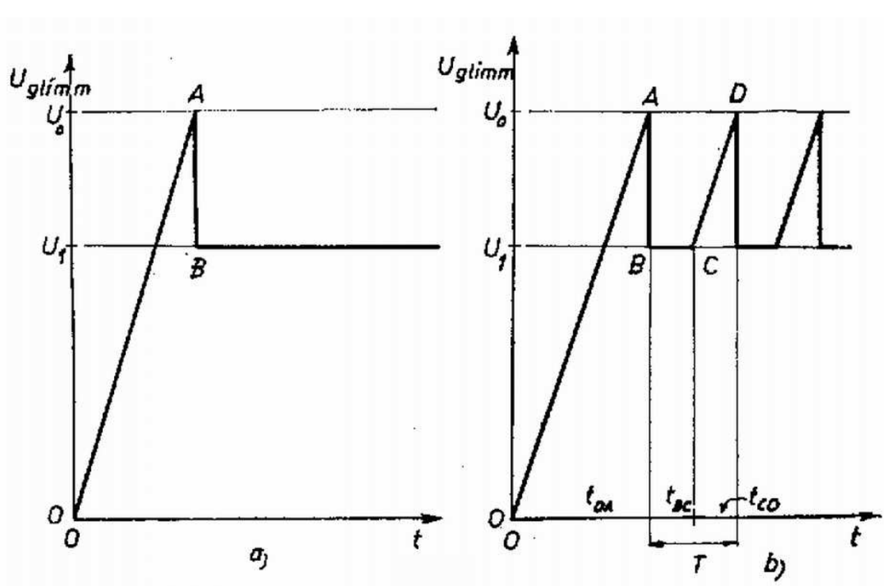
1. $A_1 > 0$, vagyis $\dfrac{R_1}{R_2} > \dfrac{U - U_0}{U_0 - U_1}$. Ekkor a kezdeti kisütő áram nagyobb, mint a töltőáram, és így i_2 exponenciálisan csökken a τ időállandóval (3*a* ábra).

1. *a)* Ha $A_2 > i_{\min}$, akkor a lámpa nem kapcsol ki, feszültsége végig U_1 marad (4*a* ábra).

1. *b)* Ha $A_2 < i_{\min}$, akkor $t_{BC} = \tau \ln \dfrac{A_1}{i_{\min} - A_2}$ idő elteltével i_2 az $i_{\min}$ alá csökken, és a fénycső kialszik. Újra kell tölteni a kondenzátort $U_C = U_1 + U_2 i_{\min}$ feszültségről kiindulva az U_0 gyújtási feszültségig (CD szakasz). A feltöltéshez szükséges t_{CD} idő (3) alapján határozható meg:

$$t_{CD} = \tau_1 \ln \frac{U - U_1 - R_2 i_{\min}}{U - U_0}.$$

Ezután a folyamat A-tól kezdve megismétlődik $T = t_{BC} + t_{CD}$ periódusidővel (4*b* ábra).



4. ábra

2. $A_1 < 0$, azaz $\dfrac{R_1}{R_2} < \dfrac{U - U_0}{U_0 - U_1}$ A kisütő áram kicsi a töltőáramhoz képest, i_2 exponenciálisan növekszik A_2 értékig ($3b$ ábra), a glimmlámpa nem fog kikapcsolni, feszültségének időfüggvényét a $4a$ ábra mutatja. A rendelkezésre álló numerikus értékek behelyettesítése után $A_1 > 0$, azaz az 1. esettel állunk szemben. $A_1 = 241$ μA, $A_2 = 93$ μA és $\tau = 5,94$ s. Sajnos a fénycsőre jellemző $i_{\min}$ áramerősséget a feladat szövege nem tartalmazza. Mindenesetre kijelenthetjük, hogy ha $i_{\min} > 93$ μA, de természetesen kisebb, mint $A_1 + A_2 = 334$ μA, akkor periodikus feszültségváltozás mérhető a glimmlámpa sarkain. Legyen $i_{\min} = 200$ μA! Ekkor $t_{BC} = 4,821$s és $t_{CD} = 8,821$ s, azaz a periódusidő $T = 13,6$ s.

Maróti Péter