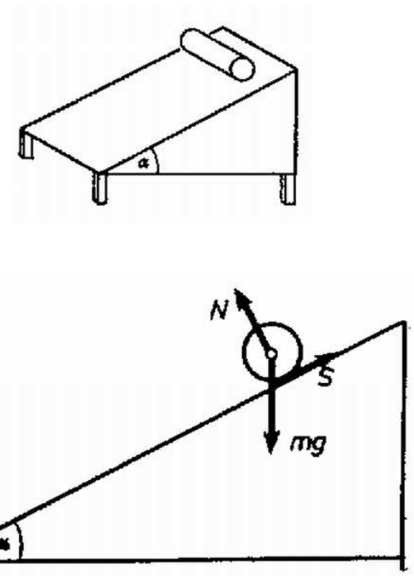
A lejtőn guruló hengerre az mg súlyerőn kívül a lejtő merőleges nyomóereje (N) és az S súrlódási erő hat (1. ábra).



1. ábra

Mivel a henger lejtőirányú mozgást végez, e három erő eredőjének lejtőirányúnak kell lennie, azaz

$$N = mg\ \cos\ \alpha. \tag{1}$$

A haladó mozgást leíró egyenlet

$$mg\ \sin\ \alpha - S = ma, \tag{2}$$

míg a középpont körüli forgómozgást az

$$M = \Theta\beta$$

azaz

$$Sr = (1/2)mr^2\beta \tag{3}$$

összefüggés határozza meg.

A súrlódási együttható értékétől függően két eset lehetséges: *a)* a henger tisztán gördül, *b)* a henger csúszva gördül.

Nézzük először az első esetet. Ekkor a haladó mozgás gyorsulása és a forgás szöggyorsulása között meghatározott összefüggés van:

$$a = r\beta. \tag{4}$$

A (4) kényszerfeltétellel a (2) és (3) egyenletek megoldása:

$$a = (2/3)g\ \sin\ \alpha, \tag{5}$$
$$S = (1/3)mg\ \sin\ \alpha. \tag{6}$$

A súrlódási erő így kapott értékének teljesítenie kell az

$$S \le \mu N \tag{7}$$

feltételt. Ha ez igaz, azaz

$$(1/3)mg\ \sin\ \alpha \le \mu mg \cos\ \alpha, \tag{8}$$

$$\mu \ge (1/3)\mathrm{tg}\,\alpha,$$

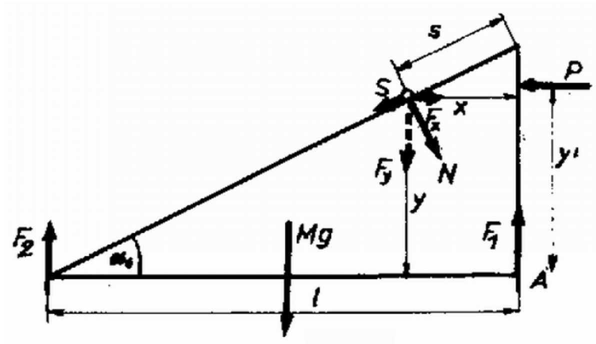
akkor a henger tökéletesen gördülve halad végig a lejtőn.

Ennél kisebb súrlódási együtthatók mellett a henger csúszva gördül. Ekkor a (4) kényszerfeltétel nem teljesül. A súrlódási erőről viszont tudjuk, hogy csúszásnál felveszi maximális értékét:

$$S = \mu N = \mu mg\ \cos\ \alpha, \tag{9}$$

és a tömegközéppont gyorsulása (2) alapján

$$a = g(\sin\ \alpha - \mu\ \cos\ \alpha). \tag{10}$$



2. ábra

Vizsgáljuk a lejtőre ható erőket! Ha a henger középen gördül, a lejtő magasabb, illetve alacsonyabb oldalának két-két lábán ugyanakkora erő hat. Ezek eredőjét jelöljük F_1 gyel, ill. F_2-vel (2. ábra). A lábaknál ható erők függőleges irányúak, hiszen a „talaj igen sima” – a súrlódás elhanyagolható.

A henger érintkezési pontjánál a lejtőre a nyomóerő és a súrlódási erő ellenereje hat. Ezek eredőjének függőleges komponense:

(11) $$F_y = mg\ \cos^2\ \alpha + S1\ \sin\ \alpha,$$

vízszintes komponense

(12) $$F_x = mg\ \cos\ \alpha\ \sin\ \alpha - S\ \cos\ \alpha.$$

A lejtőre hat még a saját súlya, amelynek nagysága Mg; valamint a magas oldal kitámasztásánál a lejtő elmozdulását megakadályozó P nagyságú erő, aminek támadáspontját jellemezzük az y' magassággal (2. ábra).

A lejtő akkor van egyensúlyban, ha az erők és a forgatónyomatékok eredője nulla. Az erők komponenseire felírható egyenletek:

(13) $$Mg + F_y = F_1 + F_2,$$

(14) $$F_x = P.$$

Jellemezzük a henger helyzetét a 2. ábrán feltüntetett x és y koordinátákkal, majd írjuk fel az A pontra vonatkoztatott forgatónyomatékok eredőjét (a lejtő alapja l hosszú):

(15) $$Mg(l/2) + F_y x + Py' - F_2 l - F_x y = 0.$$

A (13), (14) és (15) egyenletek megoldása:

(16) $$F_1 = (Mg/2) + F_y[1 - (x/l)] + F_x(y - y')/l,$$

(17) $$F_2 = (Mg/2) + F_y(x/l) - F_x(y - y')/l.$$

A feladat kitűzéséből nem egyértelmű, hogy a kitámasztást hogyan végezzük. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a P erővel mindig a hengerrel egyforma magasságban hatunk. Ekkor a (16) és (17) egyenletek utolsó tagja nulla.

Ha a henger a lejtő tetejéről kezdősebesség nélkül indul, akkor az általa megtett út $s = (1/2)at^2$ és $x = s\ \cos\ \alpha$.

Ha $\mu \geq (1(3)\mathrm{tg}\ \alpha$, a henger tisztán gördül és az (5), (6) összefüggéseket kell alkalmazni. (11) és (12) felhasználásával (16) és (17) alapján a lejtő magas oldalán levő lábaknál fellépő erő:

$$F_1/2 = Mg/4 + (mg/2)[\cos^2\alpha + (1/3)\sin^2\alpha][1 - (1/3)(gt^2/l)\sin\ \alpha\ \cos\ \alpha],$$

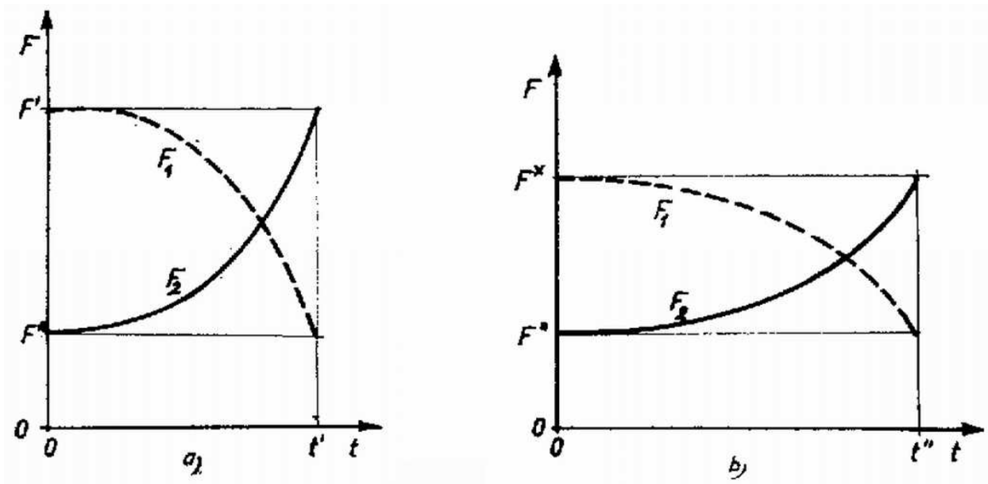
míg a másik oldalon

$$F_2/2 = (Mg/4) + (mg/2)[\cos^2\alpha + (1/3)\sin^2\alpha](1/3)(gt^2/l)\sin\ \alpha\ \cos\ \alpha.$$

Csúszva gördülésnél $[\mu < (1/3)\mathrm{tg}\ \alpha]$ a (9) és (10) összefüggéseket kell behelyettesíteni. Ekkor:

$$F_1/2 = (Mg/4) + (mg/2)(\cos^2\alpha + \mu\ \cos\ \alpha\ \sin\ \alpha)[1 - (gt^2/l)\cos\ \alpha(\sin\ \alpha - \mu\ \cos\ \alpha)];$$
$$F_2/2 = (Mg/4) + (mg/2)(\cos^2\alpha + \mu\ \cos\ \alpha\ \sin\ \alpha)(gt^2/l)(\sin\ \alpha - \mu\ \cos\ \alpha)\cos\ \alpha.$$

A 3. ábrán az erőket az idő függvényében ábrázoltuk; F_1-et szaggatott, F_2-t folytonos vonallal. Valamennyi görbe parabolaív.



3. ábra

Pálinkás István (Szolnok, Verseghy F. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján