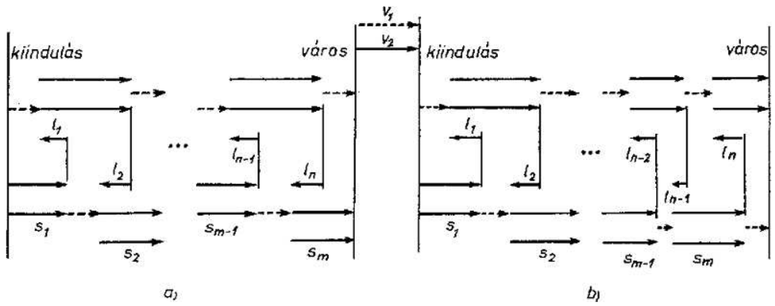
Először a feladatot a következőképpen értelmezzük: a három ember akkor jut el a városba, ha mindhárman egyidejűleg ott vannak.

Egyszerre indulnak. A mindenkori gyalogosok nyilván a város felé futnak. Visszafordulnia csak a motorosnak érdemes, hogy miután előző utasát letette, a hátrább levő gyalogost felvegye. A legáltalánosabb módszert az 1. ábra szemlélteti. Folytonos vonallal a motoron ülő, szaggatottal a futó emberek útját jelöltük.



1. ábra

Azt a lehetőséget elvethetjük, hogy a motort egymásnak hátrahagyják. Ugyanis amíg a motor sebessége a futóénál nagyobb, rövidebb lesz a beérési idő, ha a motor hátrahagyása helyett azzal valaki visszafordul.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a motort mindig ugyanaz vezeti.

Ha a három ember a városba nem egyszerre jut el, hanem például az, aki az utolsó szakaszt futva teszi meg, megelőzi társait, akkor az utóbbiak megérkezési ideje számít beérkezési időnek. Könnyen beláthatjuk, hogy ekkor a cél elérésének ideje nem lehet minimális. Ha ugyanis a motoros a várostól kicsivel távolabb, az A pontban teszi le a városba gyalogosan érkezőt, akkor ő még mindig hamarabb ér be a többieknél. Ezért még mindig a motoros beérkezési idejét kell figyelembe vennünk, azonban most a motoros az előbbi esetnél hamarabb ér célba, hiszen pl. a motoros A pontba érésének időpontjától számítva a motorosnak rövidebb utat kell megtennie a városba érésig.

Hasonlóan láthatjuk be, hogy ha a motorral érkeznek meg hamarabb, akkor is lerövidíthető a beérkezési idő. Következésképpen, ha a legrövidebb idő alatt érnek célba, akkor mindhárman egyszerre érkeznek meg.

Jelöljük a teljes távolságot s-sel, a többi jelölést az 1. ábra magyarázza. A motoros

$$T_1 = \frac{s + 2\sum_{i=1}^{n} l_i}{v_2} \tag{1}$$

idő alatt, az pedig, aki utasként indult,

$$T_2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} 8_i}{v_2} + \frac{s - \sum_{i=1}^{m} s_i}{v_1} \tag{2}$$

idő alatt éri el a várost.

Aki éppen nem motoron ült, az egy szakaszon annyi ideig gyalogolt, amíg a motoros egyet fordult, és vele újból találkozott. Írjuk fel az idők egyenlőségét azokra a szakaszokra, ahol a gyalog elindult ember futott, azaz a motoros minden páratlanadik fordulójára! (Ha az 1./a ábra szerint érik el a várost, akkor az utolsó szakaszon kihasználjuk, hogy a városba egyszerre érkeznek meg.) Így a következő egyenleteket nyerjük

$$\frac{s_1 - l_1}{v_1} = \frac{s_1 + l_1}{v_2},$$

$$\frac{s_2 - l_2 - l_3}{v_1} = \frac{s_2 + l_2 + l_3}{v_2},$$

$$\vdots$$

$$\frac{s_{m-1} - l_{n-1} - l_{n-2}}{v_1} = \frac{s_{m-1} + l_{n-1} + l_{n-2}}{v_2}$$

vagy

$$\frac{s_{m-1} - l_{n-2} - l_{n-3}}{v_1} = \frac{s_{m-1} + l_{n-2} + l_{n-3}}{v_2},$$

és

$$\frac{s_m - l_n}{v_1} = \frac{s_m + l_n}{v_2} \quad \text{vagy} \quad \frac{s_m - l_n - l_{n-1}}{v_1} = \frac{s_m + l_n + l_{n-1}}{v_2},$$

attól függően, hogy az 1./a vagy az 1./b ábra szerint jutnak el a városba. Adjuk össze az egyenleteket:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} s_i - \sum_{i=1}^{n} l_i}{v_1} = \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i + \sum_{i=1}^{n} l_i}{v_2}. \tag{3}$$

Az (1), (2) és (3) egyenletek, valamint $T_1 = T_2$ alapján a T_1, T_2, $\sum\limits_{i=1}^{m} s_i$ és $\sum\limits_{i=1}^{n} l_i$ ismeretleneket kiszámíthatjuk:

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = S = s\,\frac{v_1 + v_2}{3v_1 + v_2},$$
$$\sum_{i=1}^{n} l_i = L = s\,\frac{v_2 - v_1}{3v_1 + v_2},$$
$$T_1 = T_2 = T = \frac{s}{v_2} \cdot \frac{3v_2 + v_1}{3v_1 + v_2}.$$

A sebesség átlagértéke az s út és a megtételéhez szükséges T idő hányadosa. Ennek értéke mindhármuknál azonos:

$$\overline{v} = v_2\,\frac{3v_1 + v_2}{3v_2 + v_1}.$$

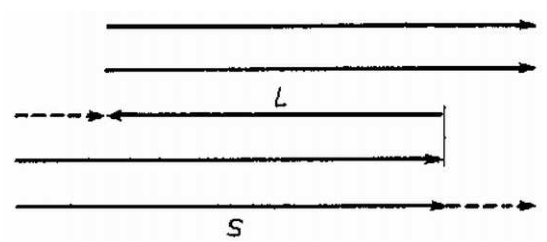
Számadatainkkal, ha $v_2 = 70$ km/h, akkor a keresett mennyiségek

$$T = 37'48'',$$
$$\overline{v} = 31{,}82 \text{ km/h},$$

ha $v_2 = 25$ km/h, akkor

$$T = 1 \text{ h } 14'10'',$$
$$\overline{v} = 16{,}18 \text{ km/h}.$$

A végeredmény független attól, hányszor fordul a motoros. A legegyszerűbb megoldás a 2. ábrán látható.



2. ábra

A városba való eljutást következő módon is értelmezhetjük: akkor jutottak el oda, ha már mindegyikük megfordult ott. Megmutatjuk, hogy így a célbaérés ideje nem rövidíthető le.

Az új értelmezést ott használhatjuk ki, hogy ha a motorral érkeznek hamarabb a városba, akkor a visszafordulónak már nem kell újra visszatérnie a városba. Ha a motoros eredetileg egyedül érkezne a városba, akkor az eljutási időt nem növeli, ha azt a társát, akivel legutóbb találkozott, magával viszi. Ezért feltehetjük, hogy a motoron ketten érkeznek meg. Visszafordulnia viszont egyiküknek elegendő, ezért amikor a még gyaloglóval találkozik, azt felveheti, s ő is visszatérhet. Ezt az esetet az előző értelmezés szerinti tárgyalás már magában foglalja, az új értelmezést az idő lerövidítésére tehát nem használhatjuk fel.

Szoljár Ágnes (Cegléd, Kossuth Lajos Gimn., II. o. t.)